



このような考え方を **区分求積法** といいます (別に名前なんてどーでもエエです)。ようするに、「和の極限が定積分 (面積) を用いて表現できる」, 「定積分を計算すれば, (本来は計算不可能だった) 和の極限が求められる」という事実が大切なのです。これってスゴイと思いませんか? (僕は感動しましたよ)。

ほくも感動したよ  ステ〜

とりあえず, 具体的な問題で解説しよう。次の流れにしたがいます。

▷Point◁

- Step ① 和を Σ 記号を用いて表す。 (\rightarrow 変化している箇所を k と置くことがポイント)
- Step ② $\frac{1}{n}$ を式の前に出す。
- Step ③ $\frac{k}{n}$ をひとまとめに考えて, $\frac{k}{n} = x$ とおく。 (\rightarrow  $\frac{k}{n}$ の形をどんどん作っていく) 。
- Step ④ 上の対応関係をイメージして, 定積分に持ち込む。

【例題】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n}$

【例題】 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}}$

【考え方】 最初から Σ を用いて書かれてあるし, $\frac{1}{n}$ も前に出ているので, ポイントの Step ③ から考えればよいですね。

$\frac{k}{n} = x$ とおくと,

(1) は, $\cos \frac{k\pi}{n} \rightarrow \cos \pi x$


(2) は, $e^{\frac{2k}{n}} \rightarrow e^{2x}$

です。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

 $\frac{1}{n} \rightarrow dx$  $\sum_{k=1}^n \rightarrow \int_0^1$

なので, 先ほどの対応関係をイメージすれば大丈夫。

【例題】 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \frac{3^3}{n^3} + \dots + \frac{n^3}{n^3} \right)$

Σ を用いて表さないと!!  さん

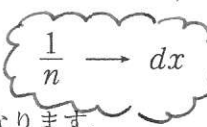
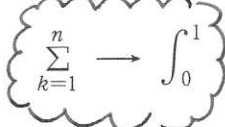
【考え方】 まずは Σ を用いて書き表すと,

(与式) = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3}$ となります。ここで,

$\frac{k}{n}$ をひとまとまりに考えるため, $\frac{k^3}{n^3} = \left(\frac{k}{n}\right)^3$ と変形することがポイントです。あとは先ほどと同様に,

$\frac{k}{n} = x$ とおくと, $\left(\frac{k}{n}\right)^3 \rightarrow x^3$

$n \rightarrow \infty$ のとき,

 $\frac{1}{n} \rightarrow dx$  $\sum_{k=1}^n \rightarrow \int_0^1$

となります。

解

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \cos \pi x dx$
 $= \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^1$
 $= 0$

ガッツリ積分

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} = \int_0^1 e^{2x} dx$
 $= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1$
 $= \frac{1}{2} (e^2 - 1)$


定積分の計算は楽勝ですね?

 よゆー

解

(与式) = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3$
 $= \int_0^1 x^3 dx$
 $= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1$
 $= \frac{1}{4}$

$\frac{k}{n}$ をひとまとめに考えます。ここがポイント!!

 定積分計算はよゆー
ねてお解り子ね

【例題】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)$

【例題】 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 + \left(\frac{n}{n+3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n+n} \right)^2 \right\}$

【例題】 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

【例題】 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \{ (\sqrt{1} + \sqrt{n})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{n})^2 + \dots + (\sqrt{n} + \sqrt{n})^2 \}$

ちょっと
ムズそう...
♡

【考え方】 基本的な流れは全く同じなのでいちいち解説しません。今回の場合は(1)(2)は最初から $\frac{1}{n}$ が前に出ているのに対し、(3)は何も出てませんし、(4)は $\frac{1}{n}$ ではなく $\frac{1}{n^2}$ が出ています。まずはこの部分を処理せねばなりませんね。

解 (1)

(与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n}$
 $= \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x dx$
 $= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi} (0 - 1) = \frac{2}{\pi}$

これは簡単
♡ 楽勝!!

(3) ギャブリ積分!!

(与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n + \frac{k^2}{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$
 $= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

1/n を前に出す
k/n の形を つくすために 分母分子を n で割りました。
♡ うまいと なるほど

(2)

(与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n+k} \right)^2$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)^2$
 $= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$
 $= \left[-\frac{1}{-2+1} (1+x)^{-2+1} \right]_0^1$
 $= \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

k/n の形を つくすために 分母・分子を n で割りました。
♡ ナル本に 7676

(与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} + \sqrt{n})^2$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n})^2}{n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right)^2$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} + 1 \right)^2$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{\frac{k}{n}} + 1 \right)^2$

1/n だけ 前に残す
n = (sqrt(n))^2 と 解釈する
k/n の形を 意識して 変形する

$= \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx$
 $= \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx$
 $= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1$
 $= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{17}{6}$

♡ これも 実に 上手い変形!!

k/n の形を つくすときは 1/n を出す

$1+x^2 = t$ とおくと、 $2xdx = dt$ であり、

| | | | |
|-----|-----|---------------|-----|
| x | 0 | \rightarrow | 1 |
| t | 1 | \rightarrow | 2 |

$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{2t} dt = \left[\frac{1}{2} \log |t| \right]_1^2 = \frac{1}{2} \log 2$

ちょっと 強引な気も しますが...
♡
ほくほ つかえぬ...