このような考え方を**区分求積法**といいます（別に名前なんてどーでもエエです）．ようするに，**「和の極限が定積分（面積）を用いて表現できる」，「定積分を計算すれば，（本来は計算不可能だった）和の極限が求められる」**という事実が大切なのです．これってスゴイと思いませんか？（僕は感動しましたよ）．

スゲ〜

ぼくも感動したよ

とりあえず，具体的な問題で解説しよう．次の流れにしたがいます．

▷Point◁

Step ①	和を $\sum$ 記号を用いて表す．（ $\longrightarrow$ 変化している箇所を k と置くことがポイント）
Step ②	$\dfrac{1}{n}$ を式の前に出す．
Step ③	$\dfrac{k}{n}$ をひとまとめに考えて，$\dfrac{k}{n}=x$ とおく．（ $\longrightarrow$ $\dfrac{k}{n}$ の形をどんどん作っていく）．
Step ④	上の対応関係をイメージして，定積分に持ち込む．

例題 (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$

例題 (2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

考え方 最初から $\sum$ を用いて書かれてあるし，$\dfrac{1}{n}$ も前に出ているので，ポイントの $\boxed{\text{Step ③}}$ から考えればよいですね．

$\dfrac{k}{n}=x$ とおくと，

(1) は，$\cos\dfrac{k\pi}{n} \longrightarrow \cos\pi x$

(2) は，$e^{\frac{2k}{n}} \longrightarrow e^{2x}$

です．$n\longrightarrow\infty$ のとき，

$$\frac{1}{n}\longrightarrow dx \qquad \sum_{k=1}^{n}\longrightarrow\int_0^1$$

なので，先ほどの対応関係をイメージすれば大丈夫．

解

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\cos\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1$$
$$=0$$

ザックリ積分

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}=\int_0^1 e^{2x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

■

定積分の計算は楽勝ですね？

よゆー

例題 (3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\frac{3^3}{n^3}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)$

Σを用いて表さないと!!

うん

考え方 まずは $\sum$ を用いて書き表すと，

(与式) $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}$ となります．ここで，$\dfrac{k}{n}$ をひとまとまりに考えるため，$\dfrac{k^3}{n^3}=\left(\dfrac{k}{n}\right)^3$ と変形することがポイントです．あとは先ほどと同様に，$\dfrac{k}{n}=x$ とおくと，$\left(\dfrac{k}{n}\right)^3 \longrightarrow x^3$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，

$$\frac{1}{n}\longrightarrow dx \qquad \sum_{k=1}^{n}\longrightarrow\int_0^1$$

となります．

解

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$
$$=\int_0^1 x^3\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}$$

$\dfrac{k}{n}$ をひとまとめに考えます。ここがポイント!!

定積分計算はよゆー

ねてても解けるわ

■

例題 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$

例題 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+2}\right)^2+\left(\frac{n}{n+3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n+n}\right)^2\right\}$

例題 (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

例題 (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{(\sqrt{1}+\sqrt{n})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{n})^2+\cdots\cdots+(\sqrt{n}+\sqrt{n})^2\}$

ちょっと
ムズそう…

考え方　基本的な流れは全く同じなのでいちいち解説しません．今回の場合は (1)(2) は最初から $\frac{1}{n}$ が前に出ているのに対し，(3) は何も出てませんし，(4) は $\frac{1}{n}$ ではなく $\frac{1}{n^2}$ が出ています．まずはこの部分を処理せねばなりませんね．

解 (1)

これは簡単

楽勝!!

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}(0-1)=\frac{2}{\pi}$$

ザックリ積分!!

(2)

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2$$

$\frac{k}{n}$の形をつくるために分母・分子をnで割りました。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

ナルホド～
フムフム

$$=\left[\frac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1}\right]_0^1$$
$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

(3)

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$$

$\frac{1}{n}$を前に出す

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\frac{k^2}{n}}$$

$\frac{k}{n}$の形をつくるために分母分子をnで割りました。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ちょっと
強引な気も
しますが….

ぼくは
ひかえめ…

うまいこと
なってるわ

$1+x^2=t$ とおくと，$2xdx=dt$ であり，

x	$0\longrightarrow1$
t	$1\longrightarrow2$

$\frac{k}{n}$の形をつくることがポイントです

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{2t}\,dt=\left[\frac{1}{2}\log|t|\right]_1^2=\frac{1}{2}\log2$$

(4)

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2$$

$\frac{1}{n}$だけ前に残す

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2}{n}$$

$n=(\sqrt{n})^2$と解釈する

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$\frac{k}{n}$の形を意識して変形する

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}+1\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+1\right)^2$$
$$=\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}$$

これも実に
上手い変形!!