グラフの増減と極値について (数学 Ⅲ 編)

1　グラフの増減

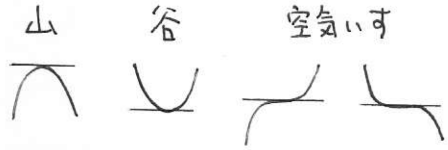
数学 Ⅱ では，以下のことを学習しました．

▷Point◁ ($y = f(x)$ のグラフの増減)

$f'(x) > 0$ を満たすような x の範囲内でグラフは増加する

$f'(x) < 0$ を満たすような x の範囲内でグラフは減少する

$f'(x) = 0$ を満たす x のとき，グラフは「山頂」*or*「谷底」*or*「空気いす」



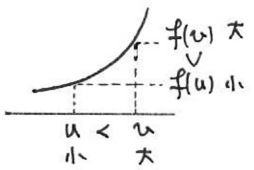
➾注　「$f'(x) \geqq 0$ のとき，グラフは増加する」というように，イコール (=) を含めて表現する場合もありますが，まあどっちでもエエです．余り気にしないでよろしい．

参考 グラフの増減に関しては，数学 Ⅱ では「直感的にわかるやろ〜」でスルーしましたが，数学 Ⅲ では『平均値の定理』を用いて証明します．その『平均値の定理』は『ロルの定理』を用いて証明され,『ロルの定理』は『連続関数の性質』を用いて証明されますが,『連続関数の性質』は高校段階で証明することはできません．なんだかオカシイと思いませんか？ここが高校の微分積分の限界なんですね．高校段階で『平均値の定理』を厳密に証明することは不可能です (詳しくは大学で).

さて，そもそも『グラフが増加する』とはどういうことなのか，もう少し突っ込んで考えて見ましょう．

▷Point◁ (グラフが増加することの定義)

$y = f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ で増加する
$\iff$　$a \leqq u < v \leqq b$ を満たす <u>任意の</u>u, v をとると，$f(u) < f(v)$ が成立する．



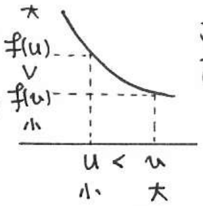
つまり，区間 $a \leqq x \leqq b$ 内のどの 2 点 u, v とっても,

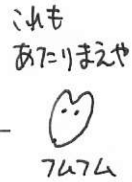
$$u < v \Longrightarrow f(u) < f(v)$$

が成立すれば，$y = f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ で増加しているということです (なんとなく理解できるでしょう).

当然ながら，減少する場合は

$$u < v \Longrightarrow f(u) > f(v)$$





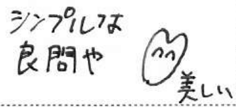
と不等号が逆になります．

この関係式は後々に非常に役に立つ考え方なので頭に入れといたほうが良いでしょう．次に紹介する問題が代表的な例です．少し難しいですが重要なので (途中まで) 解説します．

例 題 1.　$0 < \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

を示せ．



考え方　一体，何を証明すればよいのかわかりませんが，式の形が余りにも美しいので，とりあえず同じ文字をかためてみると・・・

解　$0 < \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので,

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \iff \frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とおくと,

$$\frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha} \iff f(\beta) < f(\alpha)$$

なので，$0 < \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\beta) < f(\alpha)$ であることを示せばよく，このことはつまり，$f(x)$ が $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において単調減少であることを意味する．

よって，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x) < 0$ を示せばよい (以下，略).

実は これがなかなかムズイ．
またそのうち紹介するわ

2 グラフの極大と極小

グラフの極値のようすを知ることは基本中の基本

とても大切!!

これまた数学 II の復習.

▷Point◁($y=f(x)$ のグラフの極値)

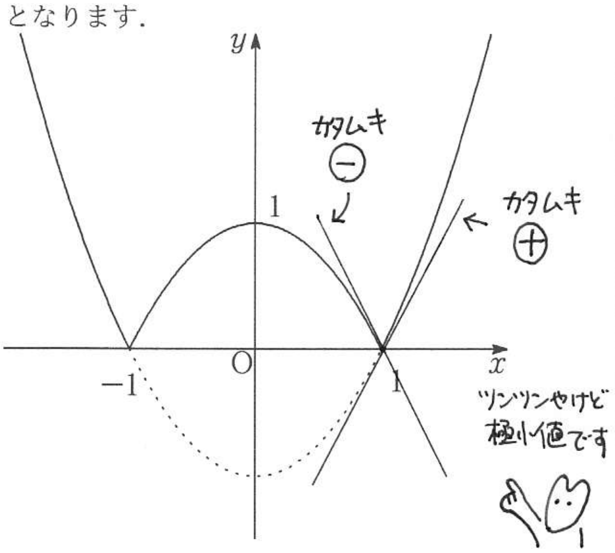
$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が (+) $\longrightarrow$ (−) へと変化するとき，グラフは $x=\alpha$ で極大
$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が (−) $\longrightarrow$ (+) へと変化するとき，グラフは $x=\alpha$ で極小

✎注 $x=\alpha$ で極値となるために，$x=\alpha$ で微分可能である (接線が引ける) 必要はありません.

例えば，$y=|x^2-1|$ の場合，$x=1$ で微分不可能ですが，$x=1$ の前後で y' の符号が (−) $\longrightarrow$ (+) へと変化しているので極小となります. $x=-1$ のところも同様です. したがって，

$x=-1$ と $x=1$ で極小値 0,

となります.



参考 おそらく大多数の人は，上のグラフをみて「ああ，$x=1$ で尖がっているから微分不可能なんだな. 尖がってるけど，まあ極小なんだな」と考えたと思いますが，これでは本末転倒です. 理論と計算によって微分可能性や極値の有無を解明し，その結果として，グラフが書けるのです. グラフを見て判断するのではありません. 念のため計算で確認しておこう.

$x \geqq 1$ のとき，$y=x^2-1$ なので，$y'=2x$

$$\lim_{x\to 1+0} y' = \lim_{x\to 1+0} 2x = 2$$

$x<1$ のとき，$y=-x^2+1$ なので，$y'=-2x$

$$\lim_{x\to 1-0} y' = \lim_{x\to 1-0} (-2x) = -2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1+0} y' \neq \lim_{x\to 1-0} y'$$

なので，$x=1$ で微分不可能である. $x=-1$ の前後でも同様にして増減表を書くと，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

増減表より，$x=1$ と $x=-1$ の前後で，y' の符号が (−) $\longrightarrow$ (+) へと変化しているので，$x=1$ と $x=-1$ で極小となる.

重要なことは，極大・極小とはあくまでも $f'(x)$ の符号が変化するところ であって，$f'(x)=0$ となるところではありません. つまり，**$f'(\alpha)=0$ だからといって，$x=\alpha$ で極値をもつとは限らないし，$f'(\alpha)\neq 0$ であっても，$x=\alpha$ で極値をもつこともあり得る**ことに注意しよう.

しかし，$x=\alpha$ で微分可能な場合に限り，次のことが成立します.

▷Point◁

$y=f(x)$ が $x=\alpha$ で微分可能ならば,

$$x=\alpha \text{ で極値をもつ} \Longrightarrow f'(\alpha)=0$$

数学IIで扱った関数は全て微分可能やったから あんまり意識せんかったけど 数学IIIでは いろんな関数があるからねえ…

そうやねんな

✎注 先ほどの $y=|x^2-1|$ の例からも分かるように，微分不可能ならばこんなことは言えません. しかし，こんな状況はめったに起こらないので実際には「$x=\alpha$ で微分可能ならば」という説明は省略することが多いです. 下手に書くと「なんで微分可能やねん. ちゃんと証明したんか？」と突っ込まれかねません.