それでは，極大極小に関する重要問題を解説しておこう．ポイントは，次の 2 つに尽きます．

チョ～重要

☆極値は $f'(x)$ の符号変化が起こるところである．

グラフのようすをしっかりイメージしよう。

☆ $f'(a)=0$ だからといって，$x=a$ で極値をとるとは限らない．

暗記するのではないよ

はーい

例題 2.　関数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2+x+1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

考え方

$$x=-1\text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(-1)=0$$

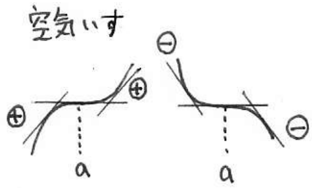
は成立しますが，その逆，

$$f'(-1)=0 \Longrightarrow x=-1\text{ で極値をとる}$$

ようするに．空気いすの可能性があるってことやね

なるほど　フムフム

空気いす



$f'(a)=0$ だけど前後で符号変化してない

とは限りません．$x=-1$ で極値をとるには $x=-1$ の前後で $f'(x)$ の符号変化が起こらないとダメで，$f'(-1)=0$ だけでは符号変化が起こるかどうかわかりません．したがって，本問の場合，$f'(-1)=0$ を計算すれば a の値は求められますが，その a に対して，$f(x)$ が本当に $x=-1$ で極値をとっているのか，確認する必要があります．確認の方法は，増減表またはグラフを図示すればよいでしょう．

解

$$f'(x)=\frac{(x-a)'(x^2+x+1)-(x-a)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-(x-a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2ax+1+a}{(x^2+x+1)^2}$$

微分は絶対にミスらない!!

トホホ

なので，$x=-1$ で極値をとるとき，$f'(-1)=0$ であるから，

$$f'(-1)=\frac{-1-2a+1+a}{1}=0$$

よって，$a=0$．このとき，$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ なので，

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

よって，$y=f(x)$ の増減は，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

したがって増減表より，$f(x)$ は

$x=-1$ で極小値 $f(-1)=-1$

$x=1$ で極小値 $f(1)=\dfrac{1}{3}$

となる．

■

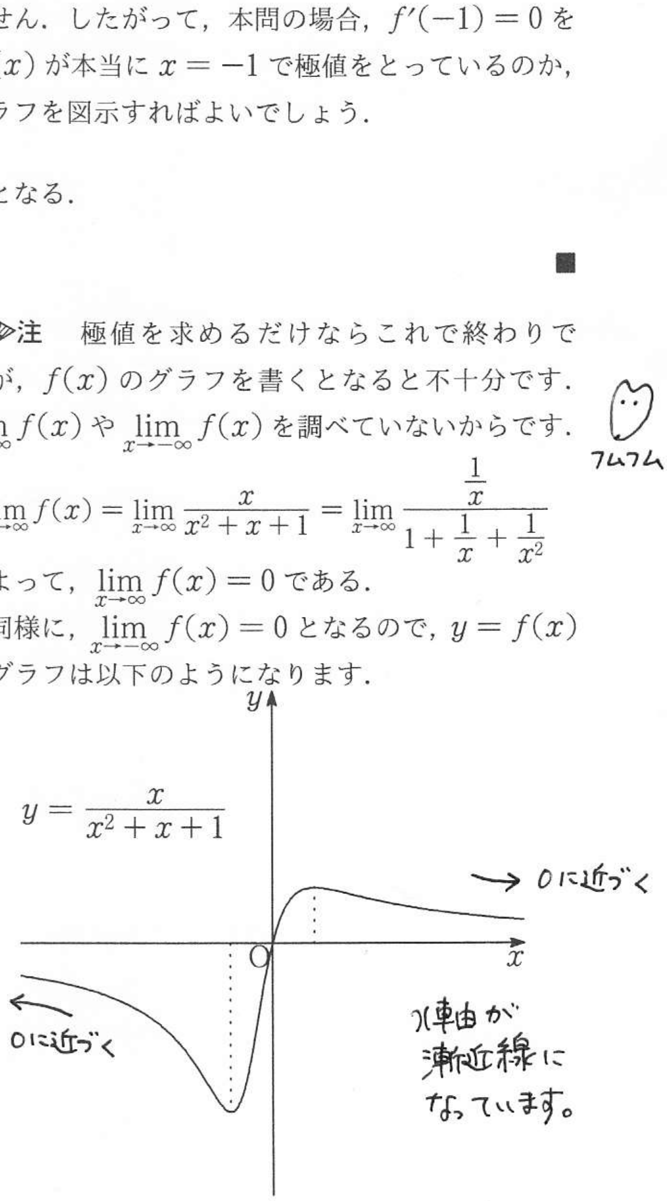
注　極値を求めるだけならこれで終わりですが，$f(x)$ のグラフを書くとなると不十分です．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を調べていないからです．

フムフム

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ である．

同様に，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ となるので，$y=f(x)$ のグラフは以下のようになります．



例 題 3.　$f(x)=x+\dfrac{a}{x-1}$ の極大値が -1 となるように，定数 a の値を定めよ．

考え方　この問題では極大値は分かっているものの，「どこで」極大となるかが不明なので，まずはここから調べていく必要があります．もう一度確認しますが，極大となるのは，$f'(x)$ の符号が $(+) \longrightarrow (-)$ へと変化するところです．

符号変化に影響のあるところのみに注目します。
だから分子 $(x-1)^2-a$ だけに注目しているのです。

大切な考え方です

解　まず，定義域は $x \neq 1$ である．

$f'(x)=1-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$ より，

$a \leqq 0$ のとき，定義域内で常に $f'(x)>0$ となるので，極値は存在しない．

$a>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{(x-1+\sqrt{a})(x-1-\sqrt{a})}{(x-1)^2}$$

となるので，増減表は以下の通り．

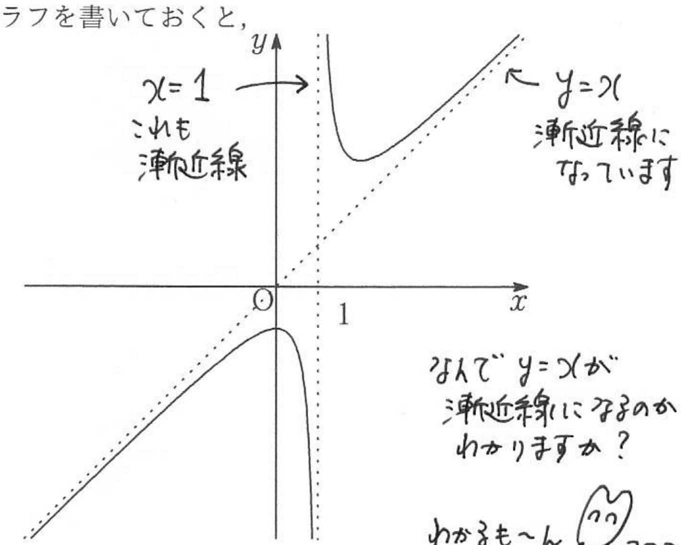
x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	╳	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	╳	↘	極小	↗

したがって増減表より，$x=1-\sqrt{a}$ のとき極大となるので，$f(1-\sqrt{a})=-1$．

よって，$1-\sqrt{a}+\dfrac{a}{1-\sqrt{a}-1}=-1$ より，$a=1$

■

参考　ちなみに $a=1$ のときの $y=f(x)$ のグラフを書いておくと，



なんで $y=x$ が
漸近線になるのか
わかりますか？

わかるも〜ん　フフフ

例 題 4.　$f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+1}$ が $x=2$ で極小値 -1 をとるように，定数 a，b の値を定めよ．また，$f(x)$ の極大値を求めよ．

考え方　$x=2$ で極小値 -1 をとり，$x=2$ で微分可能であるので，計算方法としては，$f(2)=-1$ と $f'(2)=0$ を解けば，a，b の値は求まるのですが，これでは不十分です．

先ほど述べたように，$f'(2)=0$ だからといって，$x=2$ で極値をとるかどうかはわからないからです．

求まった a，b の場合に，本当に条件に合っているかを増減表またはグラフを書いて確認する必要があります．

まして極小かどうかなんて
サッパリわからん

落ち着いて
微分
して下さい

はーい

解　$f'(x)$

$$=\frac{(2ax+b)(x^2+1)-(ax^2+bx+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-bx^2+(2a-2)x+b}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ は $x=2$ で極小値 -1 をとり，$x=2$ で微分可能であるので，

$$f(2)=-1 \quad \text{より，}\frac{4a+2b+1}{5}=-1$$

$$f'(2)=0 \quad \text{より，}\frac{-4b+4a-4+b}{25}=0$$

以上より，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-2$．

このとき，$f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2-2x+1}{x^2+1}$ であり，

$$f'(x)=\frac{2x^2-3x-2}{(x^2+1)^2}=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

よって，増減表は以下の通り．