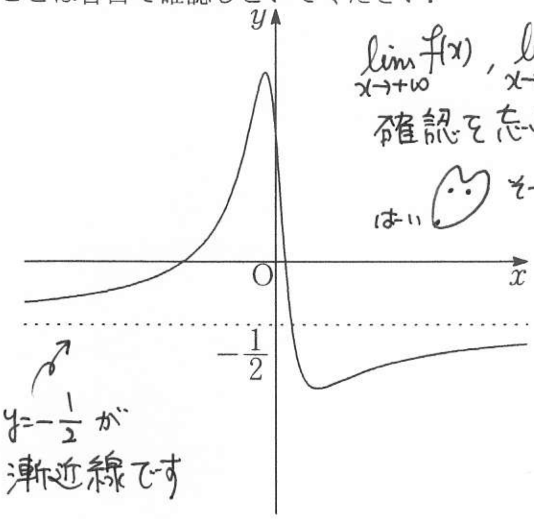
x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，増減表より，$x=2$ のとき極小値 -1，$x=-\frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{3}{2}$ をとる．

■

参考 ちなみに，$y=f(x)$ のグラフは以下のようになります．

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ となることは各自で確認しといてください．



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の
確認を忘れないこと!!
はい　そーやった
そーやった

例題 5.　関数 $f(x)=2x+\frac{ax}{x^2+1}$ が極大値と極小値をそれぞれ 2 個ずつもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

考え方 極大値と極小値をそれぞれ 2 個ずつもつということは，$f'(x)$ の符号変化が，$(+)\longrightarrow(-)$ が 2 回，$(-)\longrightarrow(+)$ が 2 回起こるということです．

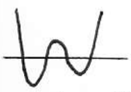
とりあえず微分して，$f'(x)$ の符号変化について考えますが，符号変化に影響を及ぼす部分にだけ注目することがポイントです．

解

$$\begin{aligned} f'(x)&=2+\frac{a(x^2+1)-ax\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\ &=2+\frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{2x^4-(a-4)x^2+a+2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$(x^2+1)^2>0$ なので，分子だけに注目して $f'(x)$ の符号変化を調べる．分子を $g(x)$ とおく．

つまり，$g(x)=2x^4-(a-4)x^2+a+2$．



g(x)のイメージ

このとき，$y=g(x)$ は 4 次関数なので，$g(x)$ の符号変化が $(+)\longrightarrow(-)$ が 2 回，$(-)\longrightarrow(+)$ が 2 回起こるためには，4 次方程式 $g(x)=0$ が相異なる 4 つの実数解をもてばよい．

さて，$g(x)$ は複 2 次式なので $x^2=t(t\geqq 0)$ と置き換えると，x の 4 次関数 $y=g(x)$ は t の 2 次関数になる．これを $h(t)$ とおく．つまり，$h(t)=2t^2-(a-4)t+a+2$．

したがって，x の 4 次方程式 $g(x)=0$ が相異なる 4 つの実数解をもつためには，t の 2 次方程式 $h(t)=0$ が相異なる 2 つの正の実数解をもてばよいので，求める条件は，$h(t)=0$ の判別式を D とするとき，

$D>0$ より，$(a-4)^2-8(a+2)>0$

軸 >0 より，$\frac{a-4}{2}>0$

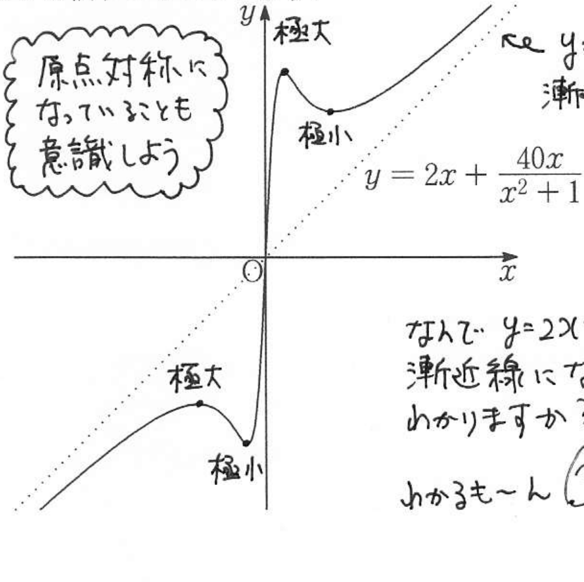
$h(0)>0$ より，$a+2>0$

以上より，$a>16$．

このへんは
数学Ⅰの
内容です
えっ
そうなん？

■

参考 ちなみに $a=40$ のときのグラフは次のようになります．原点対称なグラフで，極大値と極小値を 2 個ずつもっています．



$y=2x$
漸近線に
なってます

なんで $y=2x$ が
漸近線になるのか
わかりますか？
わかるも～ん　うん

例題 6.　関数 $f(x)=\dfrac{e^{kx}}{x^2+1}$ $(k>0)$ が極値をもつとき，k のとりうる値の範囲を求めよ．

考え方　単に「極値をもつ」とあるだけで，極大・極小の区別はありません．$f'(x)$ が符号変化しさえすればよいということです．前問同様に，**符号変化の可能性のある部分にのみ注目**します．

解

$$f'(x)=\frac{ke^{kx}(x^2+1)-e^{kx}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{kx}(kx^2-2x+k)}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{e^{kx}}{(x^2+1)^2}>0$ なので，kx^2-2x+k に注目する．これを $g(x)$ とおく．$k>0$ なので，$y=g(x)$ は下に凸な 2 次関数である．

$f(x)$ が極値をもつためには，$g(x)$ の符号変化が起こればよいので，求める条件は $g(x)=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつことである．したがって，$g(x)=0$ の判別式を D とするとき，

$$D>0 \text{ より}, \ (-2)^2-4k^2>0$$

$\therefore \quad -1<k<1.$

したがって，$k>0$ より，$0<k<1$.

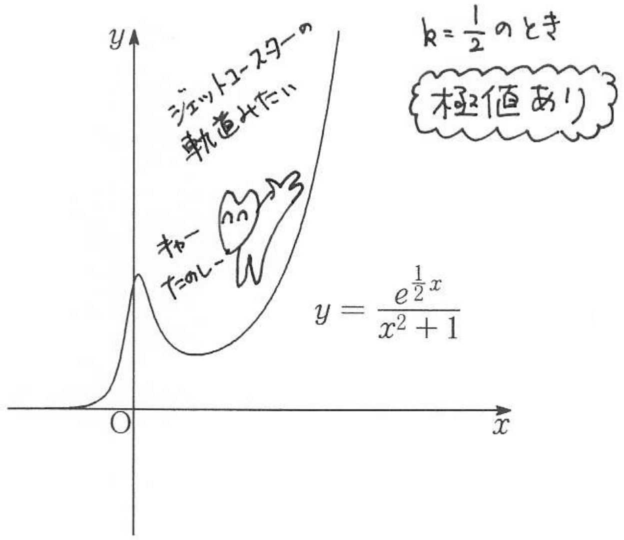
このへんも数学Ⅰの内容ですよ

マジ？

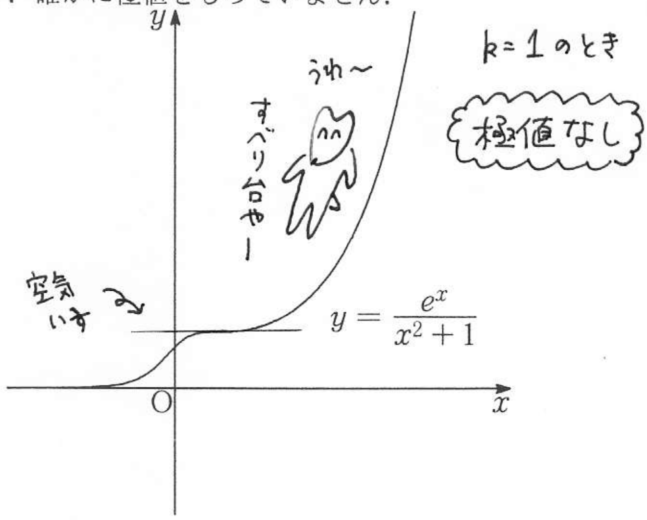
■

注　問題文に $k>0$ とありますが，$k=0$ の場合でも $f(x)$ は極値をもちます．なぜならこのとき，$y=g(x)$ は 1 次関数になるので，x 軸と必ず 1 回交わって符号変化が起こるからです．

参考　ちなみに $k=\dfrac{1}{2}$ のときのグラフは次のようになります．



なお，$k=1$ のときのグラフは次のようになります．確かに極値をもっていません．



注　**例題 5.** と **例題 6.** は，ちょっと難しいかもしれませんが，基本的な考え方は単純です．しかも，理屈は数学 Ⅲ ですが，やってる計算過程は数学 Ⅰ Ⅱ です．この問題ではむしろ，数学 Ⅰ Ⅱ の知識と技量が要求されます．数学 Ⅲ を学ぶことは数学 Ⅰ Ⅱ の復習にもなるのですね．

数Ⅲ ガンバる!!
数Ⅰ, 数Ⅱの復習もできるなんてラッキー．
1粒で2度美味しい

重要ポイントをもう一度確認しておこう．

☆ 大切 とても 大切 ☆

> 極値は $f'(x)$ の符号変化が起こるところである．
> $(+)\longrightarrow(-)$ へと変化するとき，グラフは極大
> $(-)\longrightarrow(+)$ へと変化するとき，グラフは極小
> $f'(a)=0$ だからといって，$x=a$ で極値をとるとは限らない．

極値に関する問題は，この 4 つのポイントさえ押さえておさえておけば，たいてい何とかなります．しっかりと頭に入れとこう．

OK はーい