極限値の四則演算

極限値計算の基本です。

1　当たり前なこと

アタリマエ, アタリマエ…

例えば，数列 $\{a_n\}$ が 2 に収束し，数列 $\{b_n\}$ が 3 に収束するならば，2 つの数列を足し合わせた数列 $\{a_n+b_n\}$ は n が大きくなるにつれてどのようになるでしょうか？つまり，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ は？

ん？ そんなん，おそらく….

このことはつまり，次のような状況をいっています．

$$
\begin{array}{cccccccc}
\{a_n\} & : & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdots\cdots & \longrightarrow & 2\\
\{b_n\} & : & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \cdots\cdots & \longrightarrow & 3\\
\{a_n+b_n\} & : & a_1+b_1, & a_2+b_2, & a_3+b_3, & a_4+b_4, & \cdots\cdots & \longrightarrow & \boxed{\ ?\ }
\end{array}
$$

上の様子を見れば，数列 $\{a_n+b_n\}$ はどのようになるのかは，ごく自然にわかるでしょう．つまり，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$ なので，

やっぱり～

思ったとおり

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=2+3=5$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は 5 に収束することがわかります．単純に 2 と 3 を足せば良いだけでした．

▷Point◁

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$（収束），$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$（収束）のとき，

和　：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$

差　：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

実数倍：$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$（$k$：定数）

積　：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\alpha\beta$

商　：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

（ただし，$\beta\neq 0$ の場合に限る）

このように四則演算できる．

収束していることが大前提なのね

フムフム

要するに，数列 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ がきちっと収束する（または収束ことがわかっている）場合には，あんまり気にせずにそのまま四則演算しても構わないということです．

参考　このアタリマエな事柄も前回の犬プリで紹介した $\boxed{\text{収束することの厳密な定義}}$ に基づいて証明できます．興味ある人は大学レベルの微積分の本を参照してください．まあ，ワケわからんと思いますが．

はーい．絶対に見ませーん

例題 1.　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限値を計算せよ．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n-1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$

アタリマエ アタリマエ

考え方　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が収束しているので，そのまま四則演算してかまいません．

カンタ～ン

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)=4\lim\limits_{n\to\infty} a_n-5\lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$=4\times3-5\times(-2)=22$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n-1)$
$=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)-1=3(-2)-1=-7$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)}$
$=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{3+(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{1}{5}$

注　上の例ではかなり丁寧に式変形しましたが，通常はいきなり答えを書いてかまいません．

そりゃそうや いちいちメンドクサイわ

アタリマエデナイ？

2　当たり前でないこと

いったい何が？

しかし，数列 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ が収束しない（または収束するかどうかわからない）場合は，**絶対に安易に計算してはダメです**（つまり，勝手にカッコをほどいたり展開したりしてはダメだということ）．

重要

> **$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が共に収束するときしか，四則演算してはならない．**

ガーン!!

また，除法で分母が 0 になる場合，つまり，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ のときに $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ の値がどのようになるのかも要注意です．「分母が 0 になるのはオカシイから，解なし」なんてことにはなりません．値が確定したり確定しなかったり，かなり変なことが起こってくるのです．

注　$n \longrightarrow \infty$ にする際，**すべての n を同時に ∞ にもっていかないといけない**ことも注意しよう．例えば，$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ において，$n \longrightarrow \infty$ のとき，カッコの中が $1+\dfrac{1}{n} \longrightarrow 1$ だから，この部分を先に考えて，

エッ？

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

アカンの？

としてはいけません．この極限値がどのような値になるのかは，後ほど学習します．

気になるー

例題 2.

「$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である」ことを証明するために次のような解答を作成しましたが，全くダメで 0 点でした．何がダメなのか考えて正しい証明をしてください．

誤答

???　べつに問題なさそう…

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ より，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$．したがって，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる．

考え方　**数列 $\{b_n\}$ が収束するとは限らないので，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ としてはいけません．** しかし，数列 $\{a_n - b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ は収束するので，この 2 つを組み合わせることは問題ありません．つまり，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ を四則演算することはできます．

解　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - 0 = \alpha$.

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

いろいろと大変やなー

フヘン

■

例題 3.

「数列 $\{a_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+5}{2a_n+1} = 3$ であるとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ」という問題で，次のような解答を作成しました．答えはあっているんですが全くダメで 0 点でした．何がダメなのか考えて正しい証明をしてください．

誤答　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくと，

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+5}{2a_n+1} = 3$ より，$\dfrac{\alpha+5}{2\alpha+1} = 3$.

???

よって，この方程式を解いて，$\alpha = \dfrac{2}{5}$

なんで～

問題文をよく読まなあきませんぬ

考え方　**数列 $\{a_n\}$ が収束するとは限らないので，そもそも $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくこと自体ダメだし，**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2a_n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+5)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+1)} = \frac{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)+5}{2(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)+1}$$

そうみたい

と計算することもできません． なので，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおいたとき，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+5}{2a_n+1} = 3$ より，$\dfrac{\alpha+5}{2\alpha+1} = 3$ とはならないのです．しかし，$\dfrac{a_n+5}{2a_n+1} = b_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は 3 に収束するので，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ は四則演算することはできます．

解　$\dfrac{a_n+5}{2a_n+1} = b_n$ とおくと，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$.

また，a_n について解くと，$a_n = \dfrac{5-b_n}{2b_n-1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5-b_n}{2b_n-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-b_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2b_n-1)}$$

$$= \frac{5-(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)}{2(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)-1} = \frac{5-3}{2\times 3-1} = \frac{2}{5}$$

■

注　「数列 $\{a_n\}$ は収束するとは限らないので lim の計算を進めることはできませんが，数列 $\{b_n\}$ は収束しているので lim の計算を進めることができる」のです．「ほとんど同じやん．いちいち，なんでこんなメンドウなことせなあかんねん」って気になりますが，これが数学の論理というものです．

はーい

がんばりまーす