京都大学からのお便り

京都大学に
行きたいなあ…
うん

京都大学で次のような問題が出題されました．

京都大学入試問題 1997 年後期理系

媒介変数表示された曲線 C

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

エッ これが京大？
4ステップにあったかも…

を考える $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

いわゆる媒介変数表示された関数の面積の問題で，本質的に以前に配布したプリント『神戸大学からのお便り』で紹介した問題と全く同じです．つまり，xy 平面上でのグラフの概形を描いて立式し，置換積分して t の積分に持ち込むという手法です．結構メンドウな計算を強いられます．

しかし，この問題の場合は極方程式の考え方を用いるととても簡単に答えが出せます．今回は，この京都大学の後期理系の問題を通して，極方程式の便利さ，凄さを実感してもらいましょう．

1　一般的な普通の解法

まずはグラフの概形を描くことから始まります．あくまでも面積計算が目的なので，およその増減が分かれば十分です．

解

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t)\\ &= -e^{-t}(\sin t + \cos t)\\ &= -e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq t + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3\pi}{4}$ なので，

$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

したがって，$-e^{-t} < 0$ なので，$\frac{dx}{dt} < 0$.

つまり，t が増加するとき x 座標は常に減少する．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\\ &= -e^{-t}(\sin t - \cos t)\\ &= -e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{4} \leqq t - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ なので，

$-\frac{\pi}{4} \leqq t - \frac{\pi}{4} < 0$ のとき，つまり，$0 \leqq t < \frac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) < 0$.

$0 < t - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき，つまり，$\frac{\pi}{4} < t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

したがって，$-e^{-t} < 0$ なので，

$0 \leqq t < \frac{\pi}{4}$ のとき，$\frac{dy}{dt} > 0$.

つまり，t が増加するとき y 座標は増加する．

$\frac{\pi}{4} < t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{dy}{dt} < 0$.

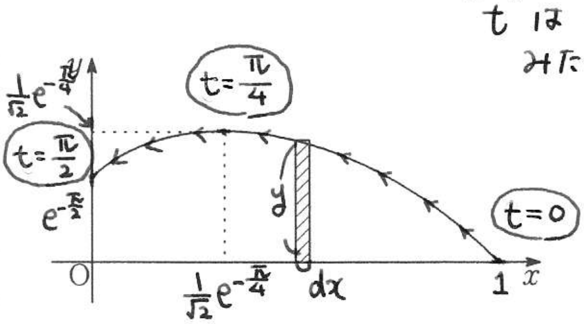
つまり，t が増加するとき y 座標は減少する．

以上をまとめると，

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
x	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	$e^{-\frac{\pi}{2}}$

$0 \leqq t < \frac{\pi}{4}$ のとき，点 $(1,\ 0)$ からスタートして，x 座標は減少，y 座標は増加（つまり左上）方向に点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$ まで移動し，$\frac{\pi}{4} < t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，x 座標も y 座標も減少（つまり左下）方向に点 $(0,\ e^{-\frac{\pi}{2}})$ まで移動することがわかります．よってグラフは下図の通り．

"t" は時間みたいなもん



微小部分 $y\,dx$ のよせあつめ

したがって求める面積は，$S = \int_0^1 y\,dx$.

$x = e^{-t}\cos t$ より，

$dx = -e^{-t}(\sin t + \cos t)\,dt$.

x	0	$\longrightarrow$	1
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

よって，

$$S=\int_0^1 y\,dx$$

xとyがそれぞれtの関数で表されているので，tで積分するために置換積分します

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-t}\sin t\cdot\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}\,dt$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-2t}(\sin^2 t+\sin t\cos t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}(\sin^2 t+\sin t\cos t)\,dt$$

計算がかなりキツイ… イヤ〜

次数下げ

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{\sin 2t}{2}\right\}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{-2t}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}(\sin 2t-\cos 2t)\,dt \cdots ①$$

ところで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}\sin 2t\,dt$$

展型的な部分積分タイプ

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)'\sin 2t\,dt$$

OK

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-2t}(\sin 2t)'\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{-2t}\cdot 2\cos 2t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\cos 2t\,dt$$

したがって，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t}(\sin 2t-\cos 2t)\,dt=0$ なので，① より，

結局，①の積分の後半部分がゼロになります。

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{-2t}\,dt$$

☆

$$=\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}e^{-\pi}+\frac{1}{4}$$

■

何とか求めることができましたが，かなり大変な計算です．でもまあ，これはこれで重要な手法だから「いちおう」できるようにはなっておこう．

はーい

2 極方程式に変換して考える解法

まず始めに，次の公式を確認しておこう．

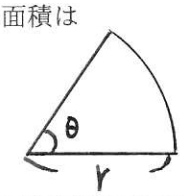
▷Point◁(扇形の面積公式)

半径 r，中心角 θ の扇形の面積は

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

で求められる．

θはrad（ラジアン）単位です

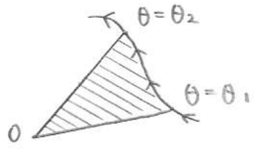


このことの応用として次の公式が成立します．

▷Point◁(極方程式の面積公式)

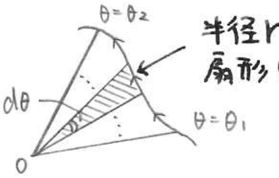
極方程式 $r=f(\theta)$ で，θ が $\theta_1\to\theta_2$ まで変化するときに動径が通過する部分の面積は，

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$



で求められる．

証明の概要は「面積は細かく分割して寄せ集める」という基本に従い極を中心に放射状分割します．そしてその分割した各部分を扇形に近似します．



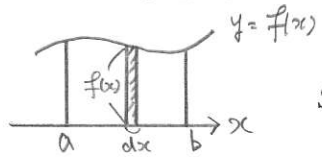
扇形の面積のよせあつめ

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

⟶ 微小扇形の面積 $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ の寄せ集め．

なるほど〜 フムフム

この考え方は xy 平面上のグラフ $y=f(x)$ の面積を，縦 $f(x)\times$ 横 dx の長方形の面積に近似して考えたのと同じ発想です．つまり，



長方形の面積のよせあつめ

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

⟶ 微小長方形の面積 $f(x)\,dx$ の寄せ集め．

早速，この公式を使ってみよう．

解 $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ より，

$x^2+y^2=e^{-2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)=e^{-2t}$

また，$x=r\cos t$，$y=r\sin t$ より，

$x^2+y^2=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2$

$\therefore\ r^2=e^{-2t}$．したがって，求める面積は，

これが極方程式です

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,dt$$

いきなりこの式からスタート

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{-2t}\,dt$$

左の☆式と同じ!!

$$=\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}e^{-\pi}+\frac{1}{4}$$

■ スゲ〜

以上，2通りの 解 を比べてみていかがでしょうか．最終的な計算式は同じになりますが，そこに到達するまでの手間がずいぶん違います．ぜひとも極方程式の面積公式を利用したいところです．なお，この公式は極方程式で表せる場合に限って使えるので，極方程式に表すことのできない一般の媒介変数表示された関数の場合は，最初の解法で望むしかありません．