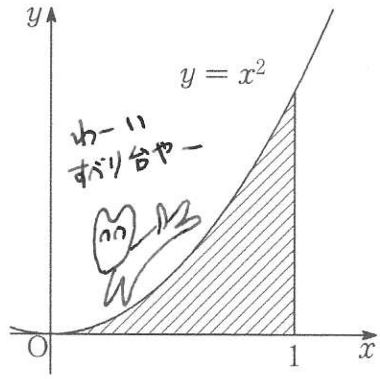
求積の原理

$y=x^2$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を $0 \leqq x \leqq 1$ で考えてみよう．答えだけなら，

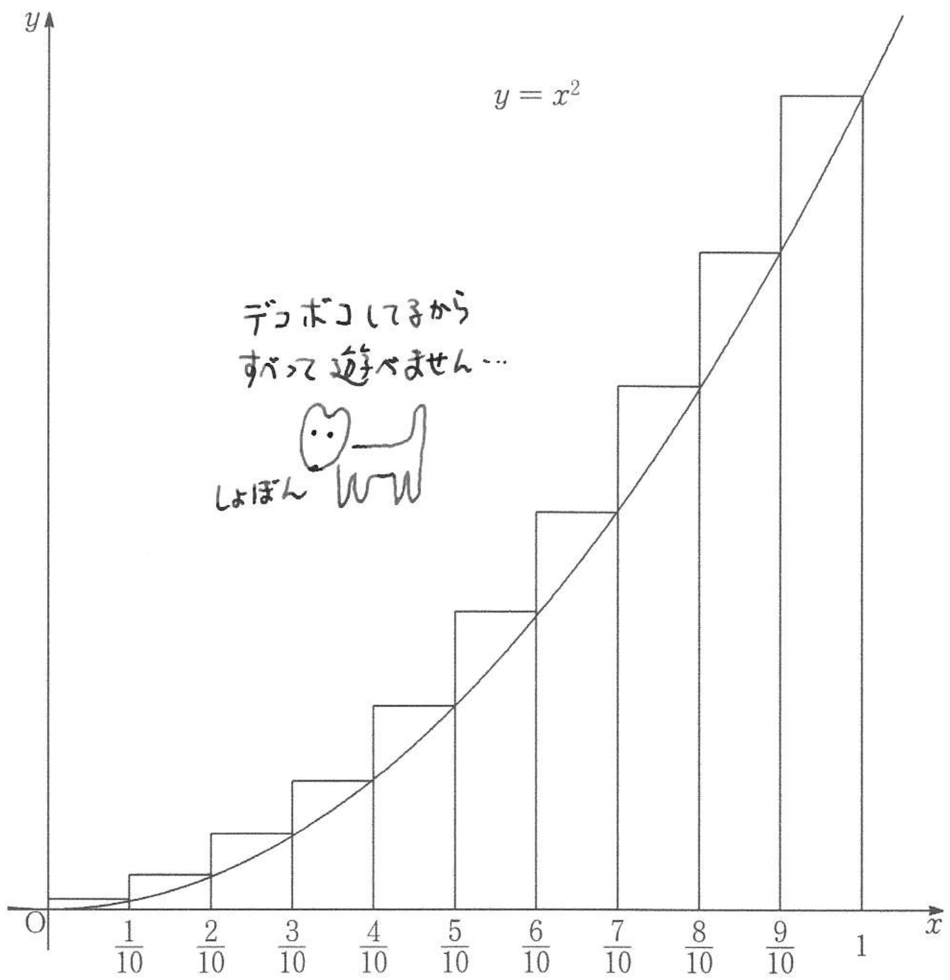
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0.3333\cdots$$

という計算式で求められますが，面積を求める本質的な意味はこの計算式からは分かりません．

古代の人は，図形を細かく分割して足し合わせるという方法で面積を求めてみました．

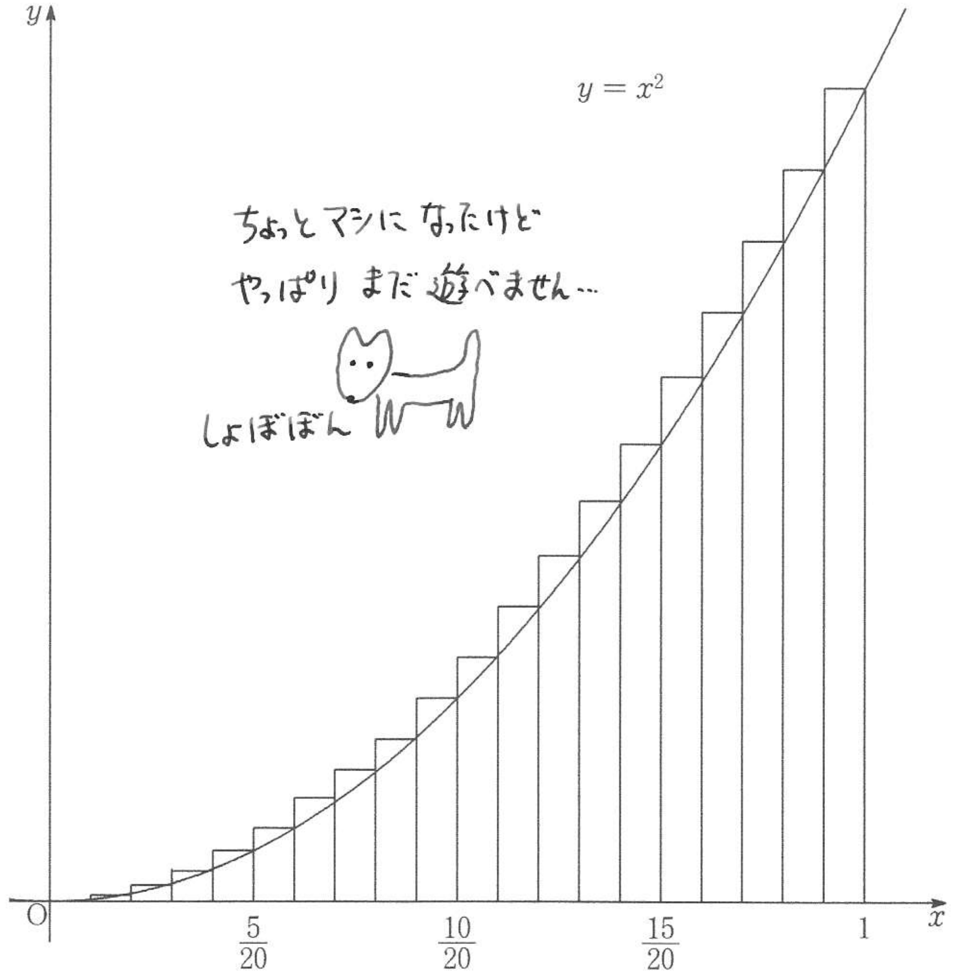


下の図は，$y=x^2$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の区間を 10 等分して長方形を当てはめたものです．長方形の面積の総和を計算してみよう．



$$\begin{aligned}(\text{長方形の面積の和}) &= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{10}{10}\right)^2 \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^2}\left\{1^2+2^2+\cdots\cdots+9^2+10^2\right\} \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\frac{10\cdot(10+1)\cdot(20+1)}{6} = \frac{77}{200} = 0.385\end{aligned}$$

下の図は，$y=x^2$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の区間を 20 等分して長方形を当てはめたものです．
長方形の面積の総和を計算してみよう．



$$
\begin{aligned}
(\text{長方形の面積の和}) &= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{20}\left(\frac{2}{20}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^2+\frac{1}{20}\left(\frac{20}{20}\right)^2 \\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20^2}\left\{1^2+2^2+\cdots\cdots+19^2+20^2\right\} \\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20^2}\cdot\frac{20\cdot(20+1)\cdot(40+1)}{6}=\frac{287}{800}=0.35875
\end{aligned}
$$

まあ当たり前のことですが，10 等分より，20 等分した方が，本来の面積により近いことが分かります．このことが求積の原理の本質です．つまり，

▷Point◁

面積は**微小部分の寄せ集め**で求められる．
この微小部分を究極に細かく（つまり無限個に細分）していけば，本来の面積に到達する

という発想が重要です．

この無限個の足し算というメンドウな計算が，微分の逆演算というシンプルな方法でできるということを，ニュートンとライプニッツが 1650 年頃に発見しました．微分積分学誕生の瞬間です．

参考 アルキメデスは『取り尽くし法』といわれる方法で円や放物線の面積を求めていました．紀元前 250 年ごろの話です．人類はここから約 2000 年かけて微分積分学に到達したのです．