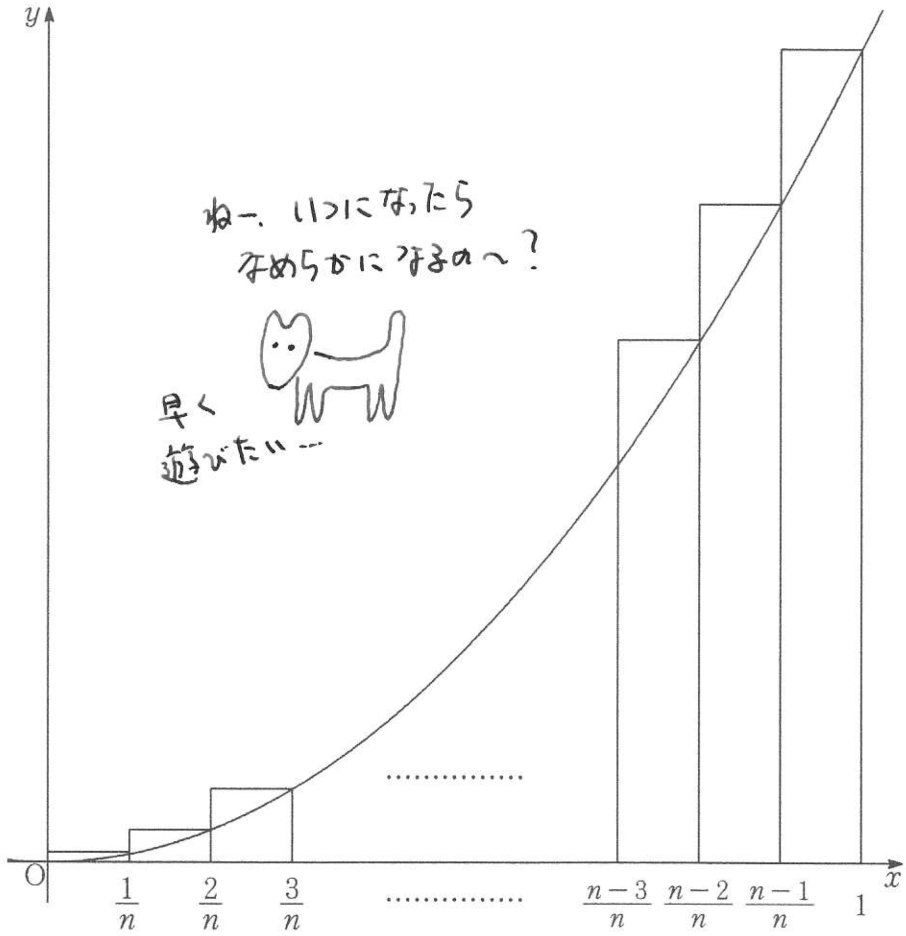
$y=x^2$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ 区間を 10 等分，20 等分した場合を考えました．さらに 30 等分，40 等分，⋯，と進めていきたいのですが，いくらなんでも計算がメンドウなので一般的に n 等分でやってみましょう．

$\boxed{0 \leqq x \leqq 1 \text{ を } n \text{ 等分した場合}}$



いきなり n 等分を
考えるのは ムツカしいかも
しれませんが、
10等分、20等分の
前例があるので
イメージしやすいと思います

そうそう

この式で n=10とすれば
10等分のときの式。
n=20とすれば
20等分のときの式に
なっていることを
確認して下さい

はーい

$$
\begin{aligned}
(\text{長方形の面積の総和}) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left\{1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \quad \cdots\cdots(※)
\end{aligned}
$$

分割の幅をより小さくするには，n をどんどん大きくしていけばよいので，つまり，$n \longrightarrow \infty$ とすると

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}
$$

分割の幅を究極に小さくしていくと，長方形の面積の総和は $\frac{1}{3}$ に収束します．

言うまでもなく，この極限値は $\int_0^1 x^2\,dx$ のことです．したがって，

この式を
Σを使って書くと
どうなるのかな？

$$
\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1 x^2\,dx
$$

という関係式が成立します．分割の間隔を究極に小さくすることで，ゴツゴツした長方形の面積の総和が滑らかな曲線で囲まれた面積になったわけです．

参考 ちょっとテンションが上がってきたので，（※）の n に具体的に大きな数を代入してみました．

n	面積 S
100	$\dfrac{(100+1)(200+1)}{6\cdot100^2}=\dfrac{6767}{20000}=0.33835$
1000	$\dfrac{(1000+1)(2000+1)}{6\cdot1000^2}=\dfrac{667667}{2000000}=0.3338335$
10000	$\dfrac{(10000+1)(20000+1)}{6\cdot10000^2}=\dfrac{66676667}{200000000}=0.333383335$
100000	$\dfrac{(100000+1)(200000+1)}{6\cdot100000^2}=\dfrac{6666766667}{20000000000}=0.33333833335$
1000000	$\dfrac{(1000000+1)(2000000+1)}{6\cdot1000000^2}=\dfrac{666667666667}{2000000000000}=0.3333338333335$

あんたも
ヒマねぇ…

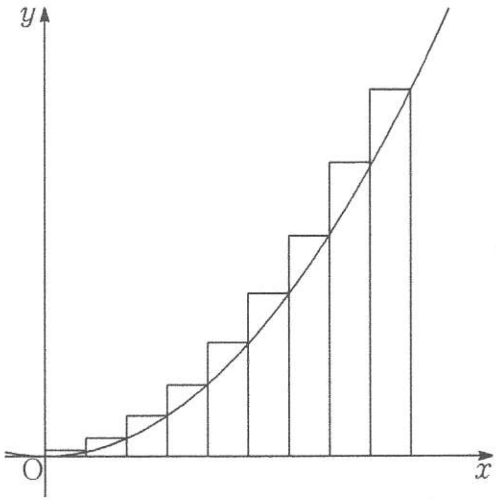
確かに，分割を細かくすればするほど，面積が $0.333333\cdots\cdots=\dfrac{1}{3}$ に近づいていることがわかりますね．

たしかに!!

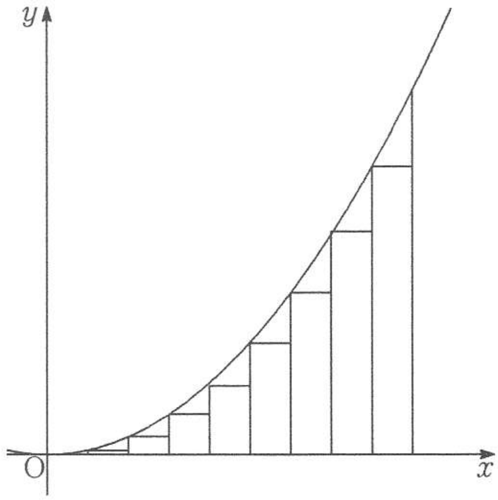
フムフム

注 長方形に分割する方法は，外側から分割する場合と内側から分割する場合の 2 通り考えられます．

外側から分割する



内側から分割する



本来ならば，両方の場合で考える必要がありますが，実はどちらで考えても全く同じである（つまり同じ極限値に収束する）ことが『ダルブーの定理』によって証明されています（詳しくは大学で学びます）．よってあんまり気にしなくてよいです．僕は何となく外側から囲む方が好きですけどね．

参考 より正確に言うと，「外側から囲んだ長方形の面積の総和の極限値」と「内側から囲んだ長方形の面積の総和の極限値」が共に存在して一致するとき**定積分が存在する**と定義します．定積分が存在するとき，**リーマン積分可能**である（または単に積分可能である）といいます（詳しくは大学で学びます）．

このように，古代の人は面積を「細かく分割して寄せ集めたもの」と解釈して求めていました．この手法は，微分や積分計算の概念が全くなく，**極限の知識だけで面積が求められている**ことを意識してください．もう一度言いますが，この，**本来は無限個の足し算で面積を求める**という手法が，**実は微分の逆演算**になっているということをニュートンとライプニッツが発見したのです．これが微分積分学の発祥なのです．