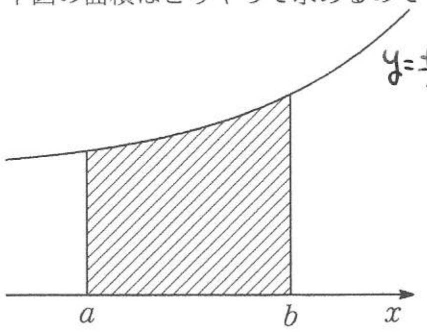
面積のキソ

何事も
キソって大切やね

1　はじめに

下図の面積はどうやって求めるのでしょうか.



数学 II では，特にあまり気にせずに，

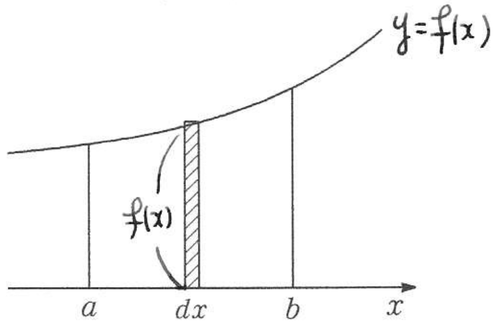
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

そのまんま
OK

という式で求めてました.「$f(x)$ を $\int_a^b$ と dx で単純に挟んだだけ」と思うかもしれませんが，この発想だと，積分における「面積」の本質が見えてきません.

この式は次のように解釈します.

斜線部の面積を求めるために，まず細かく切ってから寄せ集める，と考えるのです.



細かく切った「短冊」1 枚を，縦の長さ $f(x)$，横の長さ dx の長方形と考えます，するとその面積は

$$f(x)\times dx$$ ← 縦×横

この「短冊」の面積 $f(x)dx$ を a から b まで寄せ集めればよいので，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

となるのです.

$\int$：インテグラルは英語のSum（和）の頭文字Sからきています。

面積を求める根本原理は「細かく切って寄せ集める」ということ．この考え方はとても重要なので，しっかりとイメージしておこう.

2　x 軸または y 軸とで囲まれた部分の面積

x 軸や y 軸とで囲まれた部分の面積を求める問題は基本中の基本です.

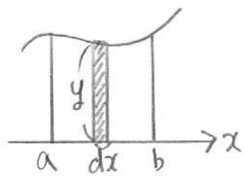
しかし，y 軸とで囲まれた部分の面積を難しく感じる人が多いようですが，「細かく切って寄せ集める」という積分の本質に従えば，どうってことありません．そういう人は首を横に 90° 傾けて眺めればよいでしょう.

▷Point◁

x 軸とで囲まれた部分の面積

$$S=\int_a^b y\,dx$$

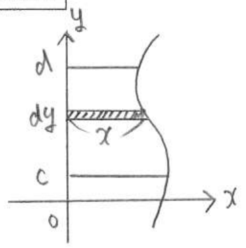
"ydxのよせあつめ"と考えます.



y 軸とで囲まれた部分の面積

$$S=\int_c^d x\,dy$$

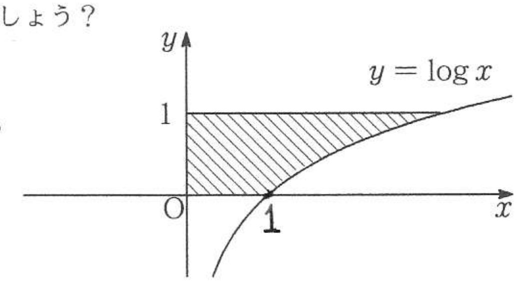
"xdyのよせあつめ"と考えます。



まずは，グラフを描く必要がありますが，あくまでも面積を求めることが目標なので，大雑把な増減だけで十分です.

例 題　$y=\log x$，x 軸，y 軸，$y=1$ で囲まれた部分の面積を 3 通りの発想で求めよ.

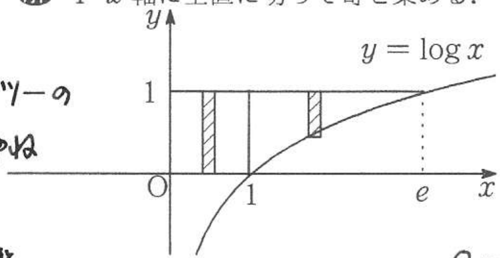
考え方　求める面積は図の斜線部分です．自由な発想で求めてみよう．3 通りくらい思いつくでしょう？



3通りって…
そんなにあります？

解 1　x 軸に垂直に切って寄せ集める．

一番フツーのやり方やね



ノーマル型

2 つの部分に分けて計算します．

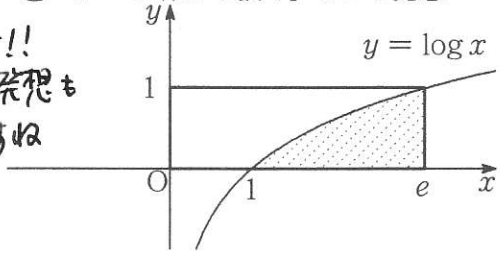
フムフム

$$S=\int_0^1 1\,dx+\int_1^e (1-\log x)\,dx$$

■

解 2　「全体から抜く」という発想．

なるほど!! そういう発想もアリですね



上図の太枠で囲まれた長方形から点線部分を抜けばよいのです．

$$S=1\times e-\int_1^e \log x\,dx$$

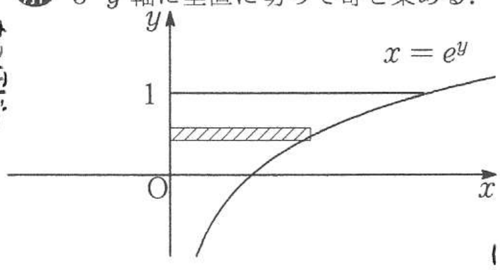
さっきよりも式がスッキリ

ヤッター

■

解 3　y 軸に垂直に切って寄せ集める．

なるほど〜 横に見るのね



$y=\log x \iff x=e^y$ より，

$$S=\int_0^1 e^y\,dy$$

これだと一発で計算できるゾ

スゴッ

■

注　ヨコで切ると，積分区間を分けることなく一気に計算できますね．これがベストの解法かもしれません．

以上の 3 手法は面積を求めるときの基本なので，しっかりと理解し，どの方法でも求められるようになっておこう．

いろんな方法で面積を求めることはとってもよい勉強になるよ

例題　$y=\sqrt[3]{x}$，$x=1$，$x=2$，x 軸

わかんね〜

考え方　$y=\sqrt[3]{x}$ のグラフがかけるでしょうか．別にグラフの形が全くわからなくても，$1\leqq x\leqq 2$ において $y>0$ であるから，面積は

うーん

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}\right]_1^2=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^2=\frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1)$$

形がわからなくても面積が求まったよ

で求まってしまいます．微分も増減も必要ありません．これでおしまい．

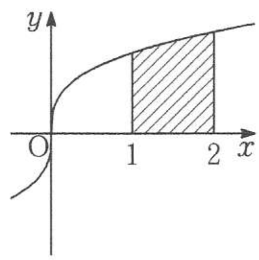
よかったー

参考　でもせっかくなのでグラフについて考察してみよう．

どうせなら知りたいな〜

$$y=\sqrt[3]{x}\iff y^3=x$$

なので，$y=\sqrt[3]{x}$ のグラフは $y=x^3$ のグラフを $y=x$ に関して対称移動したものであることがわかります（$y=x^3$ の x と y を入れ換えたものが $y^3=x$ だから）．



なお，定義域は全ての実数になります．

例題　$y=(x-e)\log x$ と x 軸

これはどんなグラフ?

考え方　前問と同様に，グラフの形を正確に把握する必要はありません．あくまでも，ザックリ言えば，積分区間内で x 軸よりも上か下か，だけ分かればよいのです．となると，まず，x 軸との交点は，$(x-e)\log x=0$ より，$x=e$，$x=1$．

さらに，$1<x<e$ において $x-e<0$，$\log x>0$ だから，$(x-e)\log x<0$．つまり，$y=(x-e)\log x$ のグラフは $1<x<e$ において x 軸よりも下になることがわかります．よって

面積は,

$$\int_1^e 0-(x-e)\log x\,dx$$
$$=-\int_1^e (x-e)\log x\,dx$$
$$=-\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2-ex\right)'\log x\,dx$$
$$=-\left[\left(\frac{1}{2}x^2-ex\right)\log x\right]_1^e+\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2-ex\right)\frac{1}{x}\,dx$$
$$=-\left(\frac{1}{2}e^2-e^2\right)\log e+\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-e\right)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\left[\frac{1}{4}x^2-ex\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2-e^2+\frac{1}{4}-e$$
$$=-\frac{1}{4}e^2-e+\frac{1}{4}$$

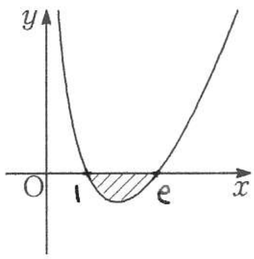
部分積分って いまひとつ 自信ないな…

参考 パソコンで描くとこんな感じ．

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(x-e)\log x=+\infty$ であることにも注意しよう．

グラフを正確に書くには注意が必要ですが，面積を求めるだけならあまり気にする必要はありません．

よかったー



例題 $y=e^x$ と $y=e$，y 軸

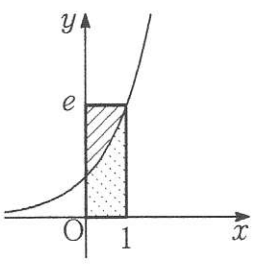
考え方　y 軸とで囲まれた面積なので，$S=\displaystyle\int_1^e x\,dy$ で求められます．

$$y=e^x \iff x=\log y$$

より，$S=\displaystyle\int_1^e x\,dy=\int_1^e \log y\,dy$ として計算します．$\log x$ の不定積分を暗記している人はどうってことない計算ですが，暗記していないと部分積分をすることになるし，万が一の計算ミスを考慮して，次のように「全体から抜く」という発想がよいでしょう．

解　図の太枠の長方形から点線部分を抜く．

$$S=e-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=1$$

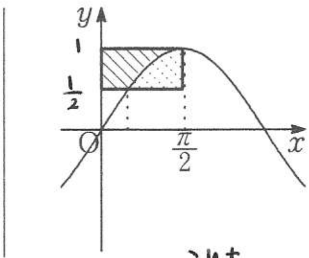


"全体から抜く"．このやり方 好きやわー

例題 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$y$ 軸

考え方　一度は経験しておきたい重要問題です．まずは「全体から抜く」という発想で計算してみよう．

図の太枠の長方形から点線部分を抜けばよい．



これも 全体から抜きまーす

オマカセ〜

解　求める面積 S は

$$S=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left[-\cos x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left\{\left(-0-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

計算も たいしたことないね

よゆー ■

このように「全体から抜く」という発想で求めるのがベストですが，もし真面目に細かく切って求める場合はどのようになるでしょうか．特に y 軸に垂直に切って求める方法を考えてみよう．

いろんな方向で切るワン

OK

$y=\sin x$ の場合，$x=$（y の式），つまり，x を y の関数で簡単に表すことができません．

その場合は，置換積分法によって y の積分を x の積分に変換して計算することになります．

解 $y=\sin x$ より $dy=\cos x\,dx$．

y	$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	1
x	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$