なるほどー
こうするしか
ないのか
フムフム

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx$$

$$= \Big[x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x'\sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

この式を
見て
何か感じませんか

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

感じてほしーなー
とっても大切なことを
表現してるんだけどネ

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

置換積分って そうゆうことやったんか!!って思うで。■

見えたゾ!!

置換積分してさらに部分積分までしています．かなり複雑な計算ですね．

3　複数の曲線で囲まれた部分の面積

2つの曲線（または直線）で囲まれた部分の面積 S を求める場合，次のことが基本となります．

▷Point◁

Step ①　交点の x 座標を求める（これを α, β とおく．ただし $\alpha < \beta$）

Step ②　関数の上下関係（だけ）に注目して図示し，立式する．

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (\text{上の関数}) - (\text{下の関数})\,dx$$

Step ③　ひたすら計算する．

注　$f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める場合，x 軸を $y=0$ と解釈し，上下関係に注目して，

$f(x)$ が x 軸よりも上の場合，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - 0\}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$f(x)$ が x 軸よりも下の場合，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{0 - f(x)\}\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

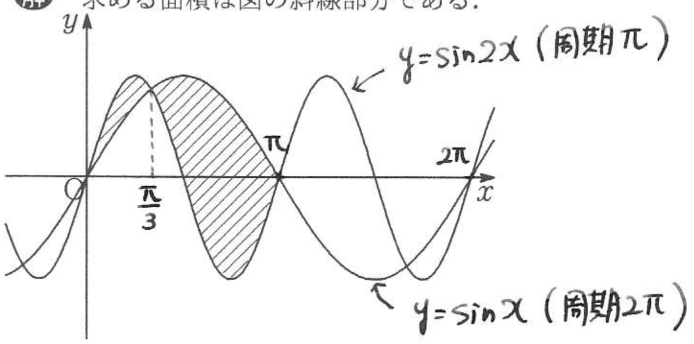
となります．

このへんは
数学II と同じ
つまんねー

例題　$y = \sin x$ と $y = \sin 2x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

考え方　2つの三角関数のグラフの位置関係を正確に把握すること（周期や交点など）．これができればあとは単なる計算問題．積分区間を $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ と $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ で分割する必要があります．関数の上下が入れ替わるからです．

解　求める面積は図の斜線部分である．



$\sin x = \sin 2x$ より，$\sin x = 2\sin x\cos x$.

$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$.

よって，$\sin x = 0$ または $\cos x = \frac{1}{2}$.

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$x = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{3}$.

よって求める面積は，

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{2}$$

カンタンやけど
ミスりそうやわ

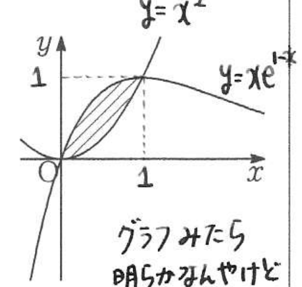
■

例題　$y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$

考え方　まず，$y = xe^{1-x}$ のグラフは書けるでしょうか．$y' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$ なので，$x = 1$ の前後で符号変化が起こります．またこのグラフが原点を通ること，$\lim_{x\to\infty} xe^{1-x} = 0$ であることを考慮して（理由はわかりますよね？）グラフを書きます．

グラフの形が分かったら今度は $y = x^2$ との交点です．普通に連立すると，$x^2 = xe^{1-x}$ より，$x(x-e^{1-x}) = 0$ となり，$x = 0$ が交点のひとつであることは分かるのですが，もう一つの交点を求めることができません．$x - e^{1-x} = 0$ を解くことができないのです．「だったらムリやん」って声が聞こえそうですが，できます．何とか，もう 1 つの交点が $x = 1$ であることを発見してください．そして，交点が $x = 1$ 以外に存在しないこと証明すれば良いのです．このように，計算で交点を導き出すことができない場合，カンでいいので「発見」してから，それ以外に存在しないことを論証するという手法もたまに登場するので心得ておいてください．

解　2 曲線の位置関係は図の通り．よって求める面積は図の斜線部分である．



グラフみたら明らかなんやけど…

2 曲線の交点の x 座標を求める．

$x^2 = xe^{1-x}$ より，$x(x-e^{1-x}) = 0$．よって，$x = 0$ または $x - e^{1-x} = 0$．$f(x) = x - e^{1-x}$ とおくと，確かに $f(1) = 0$ となっている．

また，$f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$ より，$f(x)$ は単調増加であるので，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と高々 1 個しか交点をもたない．つまり，$f(x) = 0$ の解も高々 1 個しかない．$f(1) = 0$ なので，$f(x) = 0$ の解は $x = 1$ だけであることが分かる．

したがって，2 曲線の交点の x 座標は $x = 0$，$x = 1$ である．

よって求める面積は，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (xe^{1-x} - x^2)\,dx \\
&= \int_0^1 xe^{1-x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx \\
&= \int_0^1 x(-e^{1-x})'\,dx - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \Big[\,x(-e^{1-x})\,\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{1-x})\,dx - \frac{1}{3} \\
&= -1 - \Big[\,e^{1-x}\,\Big]_0^1 - \frac{1}{3} \\
&= -1 - (1-e) - \frac{1}{3} = e - \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

■

注　「高々」というのは「多くとも」という意味．「高々 1 個」とは「多くとも 1 個しかない (つまり 1 個または 0 個)」ということ．数学特有の言い回しです

例題　$x^2 = 2\sqrt{2}y$ と $y^2 = 2\sqrt{2}x$

考え方　まずはそれぞれ図示します．

交点を求めるには，2 つの式を連立させますが，今回の 2 つの式が x と y の文字を入れ換えただけになっていることを考えれば，2 つのグラフが $y = x$ に関して対称であることがわかります．

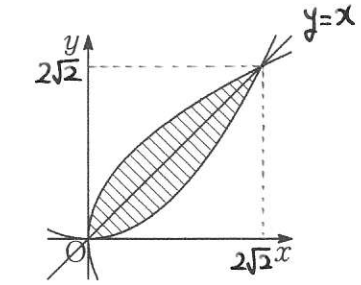
逆関数の発想だね

そうそう

ということは，$x^2 = 2\sqrt{2}y$ と $y^2 = 2\sqrt{2}x$ を連立する代わりに，$x^2 = 2\sqrt{2}y$ と $y = x$ を連立させてもよいのです．したがって，交点は $x^2 = 2\sqrt{2}x$ より，$x = 0$，$x = 2\sqrt{2}$ です．

囲まれた部分も $y = x$ に関して対称なので・・・

解　求める面積は図の斜線部分であり，これは $y = x$ に関して対称である．



したがって，求める面積は $x^2 = 2\sqrt{2}y$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積の 2 倍に等しい．

そっかー
なるほどー

$$2\int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 - x\right)dx = 2\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(2\sqrt{2}-0)^3}{6} = \frac{8}{3}$$

■

注　真面目にやるなら，$x^2 = 2\sqrt{2}y$ と $y^2 = 2\sqrt{2}x$ を連立させ，$\left(\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 2\sqrt{2}x$ を解きます．変形すると，$x^4 = (2\sqrt{2})^3x$ より，

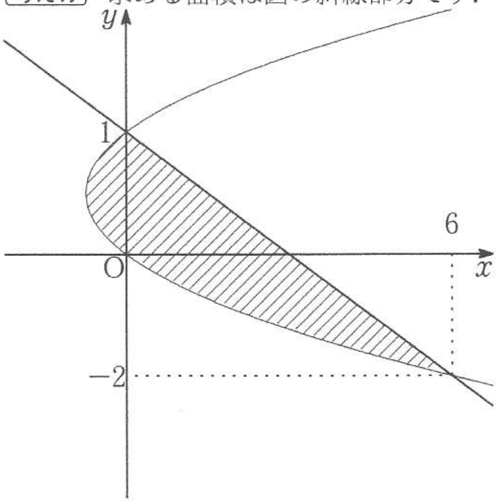
$x(x^3 - (2\sqrt{2})^3) = 0$．よって，$x = 0, x = 2\sqrt{2}$．$(2\sqrt{2})^3$ のまま処理することがポイントでしょう．

また面積は，

$y^2 = 2\sqrt{2}x \iff y = \pm\sqrt{2\sqrt{2}x} = \pm 8^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}$ より，$\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\left(8^{\frac{1}{4}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2\right)dx$ を計算すればよいでしょう．指数計算がややこしいので計算ミス続出でしょうね．

例題　$x=y^2-y$ と $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

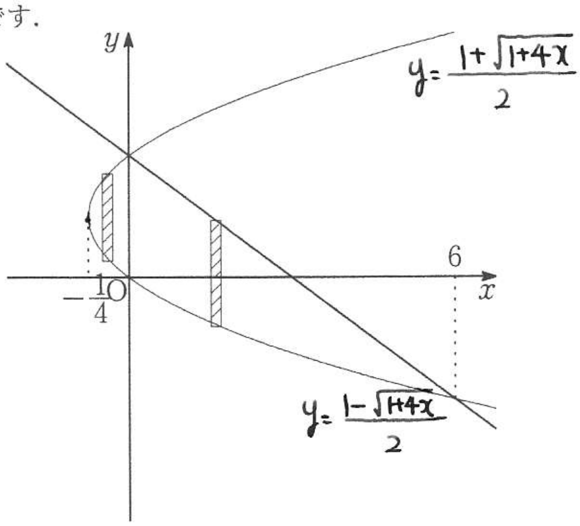
考え方　求める面積は図の斜線部分です．



答えだけでよいなら，放物線と直線で囲まれた部分の面積ですから「ロクブンノコウシキ」で一発終了ですが，今回は2通りの計算方法で求めてみたいと思います．つまり x 軸に垂直な微小区間で見る場合と y 軸に垂直な微小区間で見る場合です．

解 1（x 軸に垂直な微小区間で考える場合）

積分区間を $-\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 0$ と $0\leqq x\leqq 6$ で分割する必要があります．上部の関数が入れ替わるからです．



解の公式で解きます。

$x=y^2-y$ より，$y^2-y+x=0$

$\therefore\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$ よって求める面積は，

ふーん

うーん 長い計算式

トホホ…

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left\{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}dx$$
$$+\int_{0}^{6}\left\{-\frac{1}{2}x+1-\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\sqrt{1+4x}\,dx+\int_{0}^{6}\left\{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4x}}{2}\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{4}}^{0}+\left[-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{6}$$
$$=\frac{1}{6}+\left\{-9+3+\frac{1}{12}(25^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})\right\}$$
$$=\frac{1}{6}-9+3+\frac{1}{12}(5^3-1)=\frac{9}{2}$$

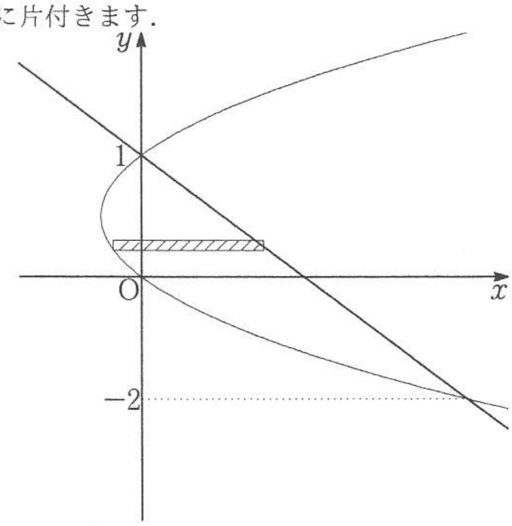
■

注　$\displaystyle\int\sqrt{1+4x}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+4x)^{\frac{1}{2}+1}\times\frac{1}{4}$

ザックリ積分．最後の $\times\dfrac{1}{4}$ を忘れないように．

解 2（y 軸に垂直な微小区間で考える場合）

今度は積分区間を分ける必要はありません．一気に片付きます．



縦軸をx軸 横軸をy軸に

なるほど〜 横に見るのね

$y=\dfrac{1}{2}x+1$ より，$x=-2y+2$

よって求める面積は，

$$\int_{-2}^{1}\{(-2y+2)-(y^2-y)\}\,dy$$
$$=\int_{-2}^{1}(-y^2-y+2)\,dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}(1+8)-\frac{1}{2}(1-4)+2(1+2)=\frac{9}{2}$$

■

上の2つの解答を見ると明らかに y 軸に垂直に切った方が簡単です．実戦的にはこちらの方法を取るべきでしょう．しかし，いろんな方向から切って面積を求めることはよい勉強になるので，かならず両方の方法でやっておいてください．

いろんな方向から
積分することは
とてもいい勉強になるよ