水の問題は微分方程式で解くに限る

そこまで断言せんでもエエのとちがう？

ある容器に水を注入したり，排水したりする問題は「水の問題」と呼ばれています．私が高校生のころは，微分方程式を習った後に「水の問題」が登場したので，「水の問題は微分方程式で解く」というのが常識でした．現行の教育課程では微分方程式が範囲外になっているので，微分方程式を使わずに解くべきなのでしょうが，やっぱり違和感があります．微分方程式を使いましょう．僕の青春の思い出に付き合ってください．

基本となる関係式は，水の体積を V，深さを h とするとき

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

合成関数の微分公式（分数の約分みたい）

です．この式の意味を考えてみよう．

$\boxed{\dfrac{dV}{dt}\text{ の意味}}$

体積 V の変化の様子なので，どれだけ増えるのか，減るのか，つまり「流入速度」または「流出速度」を表しています．

フムフム

$\boxed{\dfrac{dh}{dt}\text{ の意味}}$

深さ h の変化の様子なので，水面の高さがどれだけ上がるのか，下がるのか，つまり「水面の上昇速度」または「水面の下降速度」を表しています．

そりゃそうや

$\boxed{\dfrac{dV}{dh}\text{ の意味}}$

？？？ これは何なん？

この意味を考える前に，そもそも水の体積はどのように計算するのか考えてみよう．

従来通りの発想で，断面積の寄せ集めと考えるので，断面積を S とするとき，微小部分の体積は $S\cdot dh$ なので

$$V=\int S\,dh$$

うすい円板1枚の体積 S・dhをよせ集める

つまり，S を h で積分すれば V になる，すなわち，V を h で積分すれば S になるので，$\dfrac{dV}{dh}=S$．よって，$\dfrac{dV}{dh}$ は水面の面積を表しています．

そーやったんか

以上をまとめると，関係式 $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ の意味は

（流入速度）＝（水面の面積）×（水面の上昇速度）

あるいは

（流出速度）＝（水面の面積）×（水面の下降速度）

水が出ていくときこっちを使う

となります．水の問題ではこの関係式が大活躍します．

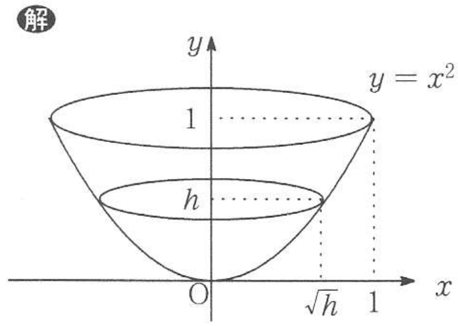
例題 1. 曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸の周りに回転してできるい形の容器に水を満たす．この容器の底に排水口がある．時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする．V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる．

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ．

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ．

うーん 実にややこしい…

解



(1) 水深 h の時の水面は半径 $\sqrt{h}$ の円である．$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ より

（流出速度）＝（水面の面積）×（水面の下降速度）

が成立するので，

$$-\sqrt{h}=\pi\left(\sqrt{h}\right)^2\cdot\frac{dh}{dt}\qquad\therefore\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

はやっ もう終わり

(2) (1) より，微分方程式 $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$ を解くと，$\sqrt{h}\,dh=-\dfrac{1}{\pi}\,dt$ より，

$$\int\sqrt{h}\,dh=\int\left(-\frac{1}{\pi}\right)dt$$

変数分離形!!

おまかせ〜

$$\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi}t + C$$

初期条件より
Cが決定!!

$t=0$ のとき $h=1$ なので，$C=\dfrac{2}{3}$. よって，

$$\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi}t + \frac{2}{3} \quad \cdots (※)$$

容器内の水が完全に排水されたとき，$h=0$ なので，(※) に $h=0$ を代入して，$t=\dfrac{2}{3}\pi$.

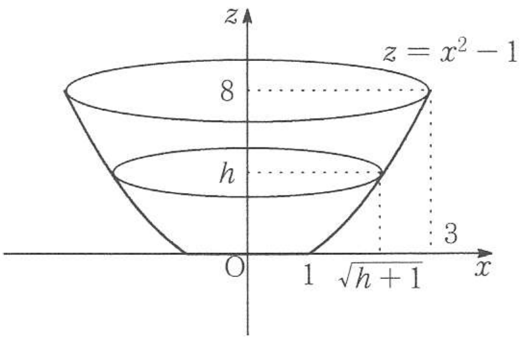
したがって，求める時間は $T=\dfrac{2}{3}\pi$.

■

例題 2.　xy 平面を水平にとり，xz 平面に曲線 $z=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$ を描く．この曲線を z 軸の周りに回転してできる容器に，毎秒 π の割合で水を注ぐとき，次の問いに答えよ．

(1)　注入し始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間を求めよ．

(2)　注入し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さを求めよ．



解　水深 h の時の水面は半径 $\sqrt{h+1}$ の円である．水の体積を V とすると，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ より

(流入速度) = (水面の面積) × (水面の上昇速度)

が成立するので，

$$\pi = \pi(\sqrt{h+1})^2 \cdot \frac{dh}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{h+1}$$

$(h+1)\,dh = dt$ より，

またまた
変数分離形

$$\int (h+1)\,dh = \int dt$$

$$\frac{1}{2}h^2 + h = t + C$$

$t=0$ のとき $h=0$ なので，$C=0$. よって，

$$\frac{1}{2}h^2 + h = t \quad \cdots (※)$$

できた〜

(1)　容器がいっぱいになるのは $h=8$ のときなので，(※) に $h=8$ を代入して，$t=40$.

(2)　$t=4$ のときの h は，(※) に $t=4$ を代入，$h>0$ を考慮して，$h=2$.

よって，$h=2$ のときの $\dfrac{dh}{dt}$ を求めればよく，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{h+1}$ なので，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{3}$ となる．

■

例題 3.　高さ 10 m の円すい形の内部をもつタンクがあり，円すいの底面が下側にあって水平であるように置かれている．タンク内の水位 (水の深さ) が y m ($y<10$) のときには $(10-y)l/$分 の速度で注入することにする．タンクが空のときに注入を始めて，9 時間後に水位が 2 m になった．タンクに水が一杯になるのは何時間後か．(1989 年京大前期理系)

京大でも
出たのね
もう
こわくないヨ

解　底面の半径を r m，t 分後の水位を y m，水の体積を $V\ l$ とする．水面の半径は $\dfrac{10-y}{10}r$ m であり，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ より

(流入速度) = (水面の面積) × (水面の上昇速度)

が成立するので

$$10-y = \pi\left(\frac{10-y}{10}r\right)^2 \cdot 10^3 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$1m^3 = 10^3 l$ です
単位をそろえた
わけです。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10\pi r^2(10-y)}$$

$(y-10)\,dy = -\dfrac{1}{10\pi r^2}\,dt$ より，

$$\int (y-10)\,dy = \int \left(-\frac{1}{10\pi r^2}\right) dt$$

$$\frac{1}{2}y^2 - 10y = -\frac{1}{10\pi r^2}t + C$$

$t=0$ のとき，$y=0$ なので，$C=0$

$$\therefore \ \frac{1}{2}y^2 - 10y = -\frac{1}{10\pi r^2}t$$

また，$t=540$ のとき，$y=2$ なので，$\pi r^2 = 3$. よって，

$$\frac{1}{2}y^2 - 10y = -\frac{1}{30}t \quad \cdots (※)$$

タンクが一杯になる時間は，(※) に $y=10$ を代入して，$t=1500$. つまり最初から 25 時間後なので，求める時間は $25-9=16$ 時間後．

■

京大は水の問題が大好きで，69 年，74 年，83 年，88 年，95 年，06 年にも出題されています．

こんなに
たくさん
出てたんや…
しらんかった

興味ある人は
探し出して解いといて下さい