∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ 無限大の話 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

ある日の放課後のＡ子さんとＢ子さんの会話.

Ａ子「そもそも ∞(無限大) って何なん？」

Ｂ子「限りなく大きいってことやろ」

Ａ子「どのくらい大きいん？」

Ｂ子「だから『限りなく』やって」

Ａ子「じゃあ，その『限り』って何なん？」

Ｂ子「さあ …… 知らんわ.」

この哲学的な問答に決着をつけるには，本が１冊分必要かもしれません．それくらい「無限大」や「無限」の明確な定義は難しい．「無限大」や「無限」は日常的には経験できない抽象概念です．常識は通用しません．この「無限」をうまく手なずけ，それを，接線や面積・体積に応用しようというのが「微積分」の目標です．高校段階では，あまり深入りせずに，感覚的，直感的に理解することです．

Ｂ子「わあ，赤阪センセ〜，来た〜」

赤阪「なに〜？ど〜したん？」

Ａ子「センセ〜イ，∞(無限大) って何ですか？」

赤阪「メチャクチャデッカイ，ってことやろ．それでエエやん」

Ａ子とＢ子「・・・・・」

まずはクイズに答えて ∞ に関する感覚を養おう．次の計算結果はどうなるでしょうか．単なるクイズなので，あんまり深刻考えずに直感的に答えよう．

例題 1. $\boxed{\text{∞ クイズ}}$

気楽に考えよう

次の結果はどうなるでしょうか.

(1) $\infty+\infty$

(2) $\infty-\infty$

(3) $\infty\times\infty$

(4) $\dfrac{\infty}{\infty}$

(5) $\infty\times$(正の数)

(6) $\infty\times$(負の数)

(7) $\infty\times 0$

(8) $\infty+$(定数)

(9) $\dfrac{\text{正の数}}{\infty}$

(10) $\dfrac{\text{負の数}}{\infty}$

(11) $\dfrac{0}{\infty}$

解 次のような結果になります.

ふ〜ん

(1) ∞

(2) わからん.

(3) ∞

(4) わからん

(5) ∞

(6) $-\infty$

(7) わからん

(8) ∞

(9) 0

(10) 0

(11) 0

(2),(4),(7)の答えが「わからん」だなんて…

どーゆーこと？

注 この $\boxed{\text{∞ クイズ}}$ の結果を厳密に証明するには，高校レベルでは無理です．興味ある人は大学の微積分の専門書を参照してください.

▷Point◁

結局のところ，∞ に関する計算で**無条件に（感覚的に）認めてよいのは，次の 6 つだけである.**

$$\infty+\infty \longrightarrow \infty \qquad \infty\times(\text{正の数}) \longrightarrow \infty$$

$$\infty\times\infty \longrightarrow \infty \qquad \infty\times(\text{負の数}) \longrightarrow -\infty$$

$$\infty+(\text{定数}) \longrightarrow \infty \qquad \frac{(\text{定数})}{\infty} \longrightarrow 0$$

つまり，∞ に関して**これら以外のことは絶対に認めてはならない.**

フムフム

何となくイメージできる

注 $\dfrac{(\text{定数})}{\infty} \longrightarrow 0$ は先ほどの ∞ クイズの (9)〜(11) をまとめたのです．この極限値は重要で，この先々もっとも頻繁に登場します.

✎注　$\infty + \infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ などの表記は，数学的に正しくないので テストで書くと減点されます．あくまでもイメージしやすいように便宜上，今だけ使っています．絶対に答案に書かないように注意してください．

ダメ～っ

✎注　$-\infty$ の場合も同様ですが，念のため確認しておこう．通常の，正の数，負の数の計算の感覚に似ていますね．　ほんまや～

$$
\begin{array}{ccc}
(-\infty)+(-\infty) & \longrightarrow & -\infty \\
(-\infty)\times(-\infty) & \longrightarrow & \infty \\
(-\infty)+(\text{定数}) & \longrightarrow & -\infty \\
(-\infty)\times(\text{正の数}) & \longrightarrow & -\infty \\
(-\infty)\times(\text{負の数}) & \longrightarrow & \infty \\
\dfrac{(\text{定数})}{-\infty} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

つまり，∞ や $-\infty$ に関してこれら以外のことは，絶対に感覚的に処理してはダメで，特に，

▷Point◁

重要

$\dfrac{\infty}{\infty}$ と $\infty-\infty$ は，マジでヤバイ！

ヤバっ

✎注　$\dfrac{1}{\infty} \longrightarrow 0$ だから，荒っぽくいえば

$$\frac{\infty}{\infty} \fallingdotseq \infty \times \frac{1}{\infty} \fallingdotseq \infty \times 0$$

この書き方も数学的に×

つまり，$\dfrac{\infty}{\infty}$ と $\infty\times 0$ とは全く同じことです．

▷Point◁

重要

$\infty\times 0$ も，マジでヤバイ！

ヤバっ

なぜヤバイのか具体例で考察しよう．

1　$\dfrac{\infty}{\infty}$ がヤバイ理由

【例】　$a_n = n^2,\ b_n = n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ は？

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{n} = n$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$．
つまり，$+\infty$ に発散 する．

あら～ 発散しちゃった

【例】　$a_n = n^2,\ b_n = n^3$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ は？

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$．
つまり，0 に収束 する．

うわ～ 今度は0に収束…

【例】　$a_n = 2n^2,\ b_n = 3n^2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ は？

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2n^2}{3n^2} = \dfrac{2}{3}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$．
つまり，$\dfrac{2}{3}$ に収束 する．

ん？ 今度は 0 以外に収束した…

このように，$\dfrac{\infty}{\infty}$ は発散したり，収束したり，いろいろな状況が起こりうるのです．

2　$\infty-\infty$ がヤバイ理由

【例】　$a_n = n^2,\ b_n = n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ は？

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，$a_n - b_n = n^2 - n = n(n-1)$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$．
つまり，$+\infty$ に発散 する．

あら～ 発散しちゃった－

【例】　$a_n = n^2,\ b_n = n^3$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ は？

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，$a_n - b_n = n^2 - n^3 = n^2(1-n)$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$．
つまり，$-\infty$ に発散 する．

これは $-\infty$ に発散しちゃいました．

【例】 $a_n = n^2 + 1$，$b_n = n^2$ のとき，
$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ は？

解 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが，
$a_n - b_n = 1$ なので，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 1$．
つまり，1 に収束 する．

1に収束しちゃった

このように，$\infty - \infty$ は発散したり，収束したり，いろいろな状況が起こりうるのです．

3 $\infty \times 0$ がヤバイ理由

"$\infty \times 0 = 0$" とカンチガイする人が多いんだよね…

【例】 $a_n = n^2$，$b_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ は？

解 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ だが，
$a_nb_n = \dfrac{n^2}{n} = n$ なので，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$．
つまり，$+\infty$ に発散 する．

【例】 $a_n = n^2$，$b_n = \dfrac{1}{n^3}$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ は？

解 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ だが，
$a_nb_n = \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$ なので，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0$．
つまり，0 に収束 する．

【例】 $a_n = 2n^2$，$b_n = \dfrac{1}{3n^2}$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ は？

解 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ だが，
$a_nb_n = \dfrac{2n^2}{3n^2} = \dfrac{2}{3}$ なので，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \dfrac{2}{3}$．
つまり，$\dfrac{2}{3}$ に収束 する．

くれぐれも "$\infty \times 0 = 0$" ではありません

このように，$\infty \times 0$ は発散したり，収束したり，いろいろな状況が起こりうるのです．

以上のように，$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\infty - \infty$，$\infty \times 0$ は，いろいろな可能性があります．極限値が確定しないからヤバイんですね．

具体例でイメージしよう

注 他の具体例も考えてみよう．

4 応用問題

∞ を扱うときは慎重にしないと，うっかり間違ってしまうことあります．まずは，次の ○× クイズ に挑戦してみよう．

例題 2. ○× クイズ
無限級数についての次の各命題について，正しいか正しくないかを判定し，正しくないものには反例をあげよ．

(1) $\{a_n\}$ が発散すれば，$\{a_n{}^2\}$ もつねに発散する．
(2) $\{a_n^2\}$ が収束すれば，$\{a_n\}$ も収束する．
(3) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は発散する．
(4) $\{a_n\}$ が収束し，$\{b_n\}$ が発散すれば，$\{a_nb_n\}$ はつねに発散する．
(5) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束し，全ての n について $a_n \neq 0$ であれば，つねに $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ も収束する．
(6) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ ならば，つねに $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在して等しい．
(7) $b_n < a_n < c_n$，$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$ ならば，$\{a_n\}$ は収束する．

どれもこれも正しいように思えますが…

うへん

考え方 こういう問題は，無限に対する考え方を理解する上でとても重要な問題で，**反例を考えることは，とても良い勉強になります．** なかなか反例を思いつかないかもしれませんが，想像力をフルに働かして考えてください．

注 他にも反例がないか考えてみよう．

全部 ×

解 すべて，正しくない．反例は以下の通り．

(1) $a_n = (-1)^n$ とすると，$\{a_n\}$ は発散するが，$a_n{}^2 = 1$ なので，$\{a_n{}^2\}$ は 1 に収束する．

マジっすか!!

(2) (1) の対偶命題である．よって (1) の反例をそのまま適用できる．

(3) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるが，$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n}$ なので $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は 0 に収束する．

(4) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = n$ とすれば，$\{a_n\}$ は 0 に収束し，$\{b_n\}$ は発散するが，$a_nb_n = \dfrac{1}{n}$ なので，

$\{a_nb_n\}$ は 0 に収束する．

(5)　$a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $b_n=\dfrac{1}{n}$ とすると，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに 0 に収束し，$a_n \neq 0$ であるが，$\dfrac{b_n}{a_n}=n$ なので，$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ は発散する．

(6)　$a_n=n+\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$ とすると，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ は存在しない．

(7)　$a_n=n$, $b_n=n-\dfrac{1}{n}$, $c_n=n+\dfrac{1}{n}$ とすると，$b_n<a_n<c_n$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ であるが，$\{a_n\}$ は収束しない．

■

例題 3.
数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，および，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ．

考え方　数列 $\{a_n\}$ や数列 $\{na_n\}$ はまだ収束するかどうかわかりません．**わかっているのは数列 $\{(3n-1)a_n\}$ が -6 に収束するということだけです．**このことをうまく利用します．つまり，a_n や na_n を $(3n-1)a_n$ を用いて表現するのです．「収束するかどうかわからないものを，収束するものを用いて表現する」という重要な手法です．

重要

解　$a_n=\dfrac{1}{3n-1}\times(3n-1)a_n$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3n-1}\times(3n-1)a_n\right\}=0\times(-6)=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

フムフム

$na_n=\dfrac{n}{3n-1}\times(3n-1)a_n$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ より，

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{3n-1}\times(3n-1)a_n\right\}=\frac{1}{3}\times(-6)=-2$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=-2$.

お見事!!
スゲ〜

■

注　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=p$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=q$ の時，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_nq_n=(\lim_{n\to\infty}p_n)(\lim_{n\to\infty}q_n)=pq$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=(\lim_{n\to\infty}p_n)+(\lim_{n\to\infty}q_n)=p+q$

となります．つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n$ が収束するときに限り，バラして計算することができるのです．上の解答はこのことを使って解いています．

これはもう完ペキに理解してまーす

注　さて，次のような解答はどうでしょうか．

解　(?)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ だと仮定すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n$ は，$+\infty$ か $-\infty$ に発散するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ に矛盾する．

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．

シンプルでエエやん

一見，問題なさそうですが，残念ながら完璧ではありません．なぜだかわかりますか．

それは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であることは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ であるための**必要条件であって十分条件ではない**からです．

つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ だと仮定すると確かに矛盾が生じますが，じゃあ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ のときに，必ず，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ であるかといえばそうではないからです．他の値に収束する可能性を捨て切れていません．

ふ〜ん
細かいことを気にするのネ…

天の声
これは細かくないよ
論理だよ

似たような問題をもう一つ．これも「**収束するかどうかわからないものを，収束するものを用いて表現する**」という重要な手法を用います．

例題 4.
数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n$，および，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

解　$(n+1)a_n=\dfrac{n+1}{n}\times na_n$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$ より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=1\times 3=3$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}\,\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$,

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=3$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\times\frac{3}{3}=1$$

■

注　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=3$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=3$ も成立することがポイント．

これは思いつかんわ…

いずれにしても，極限に関する問題は感覚的なナレが必要で，なかなか大変です．あんまり気にしすぎずに先に進もう．

＝　そのうちに分かってくるから
とりあえず前進!!