塵も積もれば…

どーなるって?

無限の世界では，いろいろ不思議なことがおこります．その不思議さを実感できる例を紹介しよう．

1　不思議な 3 本の木

例題 1.　あるところに高さ $1m$ の木がある．この木は 1 年目に $\dfrac{1}{2}m$，2 年目には $\dfrac{1}{4}m$，3 年目には $\dfrac{1}{8}m$ …と，毎年，前年の半分の高さだけ成長するという．この木は年数が経つにつれて，どのようになるか．

こんな木ないやろ

考え方　この問題を数学的に表現すれば，次のような数列の無限個の和

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$

フムフム

がどのようになるのかを調べることになります．これは，初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列です．この等比数列を無限に足していくとどうなるのでしょうか．

いきなりこんな問題を出題されても見当がつかないと思うので，20 年後までの木の高さを数式処理ソフト *Mathematica* で計算してみました．

年数	木の高さ (m)	年数	木の高さ (m)
1	1.5	11	1.999511719
2	1.75	12	1.999755859
3	1.875	13	1.999877930
4	1.9375	14	1.999938965
5	1.96875	15	1.999969482
6	1.984375	16	1.999984741
7	1.9921875	17	1.999992371
8	1.99609375	18	1.999996185
9	1.998046875	19	1.999998093
10	1.999023438	20	1.999999046

明らかにある値に近づいています

おもしろいな

この表からもわかるように，この木は高さ 2 m に限りなく近付いていることがわかります．

したがって，次の無限個の足し算の計算結果が 2 に収束すると思われます．つまり，

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots\longrightarrow 2$$

例題 2.　あるところに高さ $1m$ の木がある．この木は 1 年目に $\dfrac{1}{2}m$，2 年目には $\dfrac{1}{3}m$，4 年目には $\dfrac{1}{4}m$，　…　n 年目には $\dfrac{1}{n}m$ 成長するという．この木は年数がたつにつれて，どのようになるか．

こんな木ないやろ

考え方　この問題を数学的に表現すれば，次のような自然数の逆数の無限個の和

そりゃそうや

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

フムフム

の計算結果がどのようになるのかを調べることになります．

数式処理ソフト *Mathematica* で 200 年後までの木の高さを計算してみました．

年数	木の高さ (m)	年数	木の高さ (m)
1	1.50000	20	3.64536
2	1.83333	30	4.02725
3	2.08333	40	4.30293
4	2.28333	50	4.51881
5	2.45000	60	4.69626
6	2.59286	70	4.84692
7	2.71786	80	4.97782
8	2.82897	90	5.09356
9	2.92897	100	5.19728
10	3.01988	200	5.88301

さっきと雰囲気がちがうぞ…

この木は，200 年たってもまだ $6m$ にも達していません(実は，10 万年たっても，この木の高さは 12 m ちょっとくらいにしかならないのです！！)．ずいぶん成長が遅いですが，このまま永遠に成長を続けるとどうなるでしょうか．次の 3 つの選択肢から選んでください．

(ア) どこまでも限りなく成長していく．
(イ) $100m$ くらいの高さに達する．
(ウ) $30m$ にも達しない．

10万年たっても12mやからあんまり伸びそうにないね…

うーん

こんな木ないやろ

例題 3.　あるところに高さ 1m の木がある．この木は 1 年目に $\frac{1}{2^2}m$ 2 年目には $\frac{1}{3^2}m$，4 年目には $\frac{1}{4^2}m$，　$\cdots$　n 年目には $\frac{1}{n^2}m$ 成長するという．この木は年数がたつにつれて，どのようになるか．

考え方　この問題を数学的に表現すれば，次のような自然数の 2 乗の逆数の無限個の和

そりゃそうや

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots\cdots$$

フムフム

の計算結果がどのようになるのかを調べることになります．

この問題も，数式処理ソフト *Mathematica* で 200 年後までの木の高さを計算してみました．

年数	木の高さ (m)	年数	木の高さ (m)
1	1.25000	20	1.59843
2	1.36111	30	1.61319
3	1.42361	40	1.62084
4	1.46361	50	1.62552
5	1.49139	60	1.62867
6	1.51180	70	1.63095
7	1.52742	80	1.63266
8	1.53997	90	1.63401
9	1.54977	100	1.63508
10	1.55803	200	1.63997

ある値に近づいているようにも見えますが・・・

この木は先ほどの木よりもさらに成長が遅いようです (200 年たってもまだ人の背丈ほど)．このまま永遠に成長を続けるとどうなるでしょうか．次の 3 つの選択肢から選んでください．

(ア) どこまでも限りなく成長していく．
(イ) 10m くらいの高さに達する．
(ウ) 2m にも達しない．

2　驚きの結果

次のような結果になります．

例題 2.　の答えは (ア)．つまり，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots \longrightarrow \infty$$

あんなに成長がおそいのに・・・　マジっすか!!

この証明は高校レベルで十分可能です．様々な証明方法がありますが，一番明解なのは定積分を用いて面積比較する方法です．後ほど必ず学習するので，今は結果だけ憶えておこう．

例題 3.　の答えは (ウ)．つまり，

これは何となくそんな気がしてた…

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots<2$$

この証明も高校レベルで十分可能ですが，具体的にどんな値に近づくのかについては，高校の範囲を超えます (できなくはない)．大数学者オイラーは 1735 年にこの値が，$\frac{\pi^2}{6}=1.644934\cdots$ になることを証明しました．つまり，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

これはスゴい　びっくり!!

証明は無視して単純に結果だけを観察すると，これが驚くべき関係式であることがわかります．有理数を無限に足していくと無理数になるなんて有限和の世界では考えられないことです．しかも，なぜ円周率 π(の 2 乗) が登場するのでしょう？

オイラーはさらに研究を進め，

どちらも $\frac{\pi^2}{6}$ に近づいていく

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{1-2^{-2}}\cdot\frac{1}{1-3^{-2}}\cdot\frac{1}{1-5^{-2}}\cdot\frac{1}{1-7^{-2}}\cdot\frac{1}{1-11^{-2}}\cdots\cdots$$

という式も発見しました．下の式に表れる 2，3，5，7，11 $\cdots$ は素数です．つまり，「自然数の世界」と「素数の世界」が円周率を介してつながっていることを意味しています．数学の深遠な世界を感じませんか．

数学って奥が深いな

参考　この「自然数についての和が素数の積で表される」というオイラーの画期的な発見が，素数の秘密の解明に大きく一歩近づくターニングポイントでした．後に，リーマンがオイラーの考えをさらに発展させ「ゼータ関数 $\zeta(s)$」という関数を考案します．この関数は人類の永遠の謎である素数の秘密を解決する魔法の鍵だと言われています．

$$\zeta(s)=\sum_{n} n^{-s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

なんかスゴそう　ムムム

現在のところ，素数の秘密の解明は『リーマン予想』といわれる問題の解決にかかっており，世界中の数学者たちの間で研究されていますが未だに未解決です．興味ある人は調べてみよう．