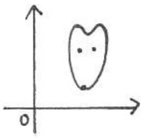
ナナメにまわす



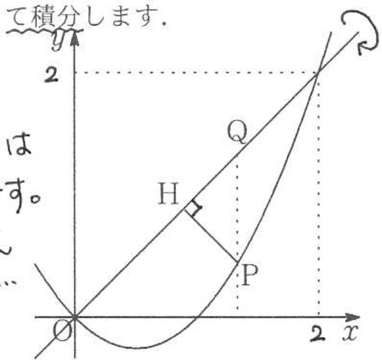
ナナメにまわすなんて・・・!!

今回は回転軸が x 軸や y 軸に平行でない場合の回転体の体積を考えます．とは言うものの，基本的な考え方は同じです．つまり「体積は断面積の寄せ集め」ということ．では，一体どこがこれまでと違うのか．その部分に注意して学習してください．

1　平面図形をナナメにまわす

例 題 1. 放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

考え方 原則として回転軸に垂直な面で切ったときの断面積を考えます．その断面積を回転軸に沿って積分します．



断面は円です。
あたりまえやけど・・・

基本的な考え方は同じなんだね

フムフム

つまり，今回の場合，図のように $\mathrm{OH}=t$ としたとき，

$$\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2\,dt$$

そりゃそうや

を計算すればよいのです (積分区間に注意)．

PH^2 を t で表せばよいのですが，いざやるとなると，$\mathrm{H}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り $y=x$ に垂直な直線と $y=x^2-x$ との交点 (つまり P の座標) を求め，PH^2 を計算しますが，かなりキツイ計算をすることになりそうです．

うーん ヤバそう・・・

これをどうクリアするのかがポイントです．

解 図のように放物線上に点 $\mathrm{P}(x,\ x^2-x)$ をとり，P から直線 $y=x$ に下ろした垂線の足を H とする．

$\mathrm{OH}=t$ とすると，求める体積は，

$$\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2\,dt$$

直線 $y=x$ と x 軸との成す角は 45° であり，$\angle\mathrm{QPH}=45^\circ$，$\mathrm{PQ}=x-(x^2-x)=2x-x^2$ となるので，

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PQ}\cos 45^\circ=\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{HQ}=\mathrm{PQ}\sin 45^\circ=\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{OQ}=\frac{x}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}x$$

よって，$\mathrm{OH}+\mathrm{HQ}=\mathrm{OQ}$ より，

$$t+\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x \qquad \therefore\ t=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

tとxの関係式

これより，$\boxed{dt=\sqrt{2}x\,dx}$ ← ポイント

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2\,dt\\
&=\pi\int_0^{2}\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{2}x\,dx\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{2}(x^5-4x^4+4x^3)\,dx\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{4}{5}x^5+x^4\right]_0^2\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi
\end{aligned}$$

置換積分!!

■

注 よくやってしまうミスは，

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2\,dt=\pi\int_0^{2}\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{2}x\,dx \quad ○$$

とすべきところを

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2\,dt=\pi\int_0^{2}\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2 dx \quad ×$$

としてしまうものです．PH^2 を t ではなく x で表したため，積分する文字を t から x に変換する必要があります．そのため t と x の関係式 $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ を作り，そこから dt と dx の関係式 $dt=\sqrt{2}x\,dx$ を得て置換積分せねばならないのです．この計算が最大のポイントでした．

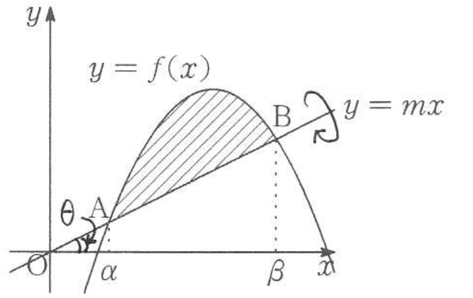
これはひっかかりやすいな・・・

実はこの問題には便利な公式があります．

▷Point◁

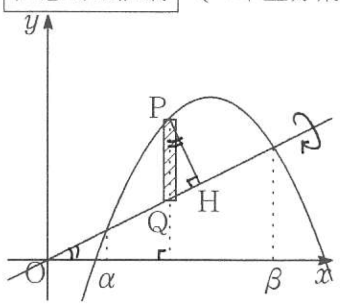
図のように，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx$ で囲まれた部分を $y=mx$ の周りに回転してできる立体の体積 V は，$y=mx$ と x 軸との成す角を θ とするとき，

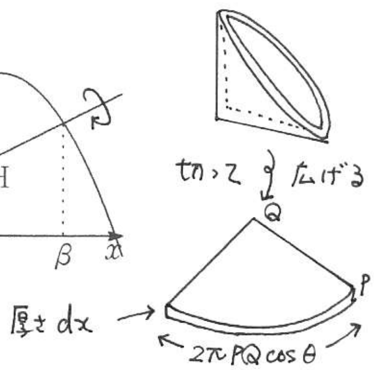
$$V=\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{f(x)-mx\}^2\,dx$$



テストでは，いきなりこの公式を使うのではなく，簡単に説明してから使うのが良いでしょう．

直感的な証明　（「傘型分割」とも呼ばれます）





図の縦 $PQ=f(x)-mx$，横 dx の微小長方形を $y=mx$ の周りに回転すると，三角コーンみたいな立体ができる．この立体を切って広げると，厚さ dx の扇形になる．弧の長さは底面の半径 PH の円周の長さに等しい．$\angle QPH=\theta$ より，$PH=PQ\cos\theta$ なので，弧の長さは $2\pi\cdot PQ\cos\theta$．

よって，この扇形の立体の体積は

$$2\pi\cdot PQ\cos\theta\times PQ\times\frac{1}{2}\times dx=\pi\cos\theta\cdot PQ^2\,dx$$

求める立体の体積は，この微小体積 $\pi\cos\theta\cdot PQ^2dx$ を $x=\alpha$ から $x=\beta$ まで寄せ集めたものだから

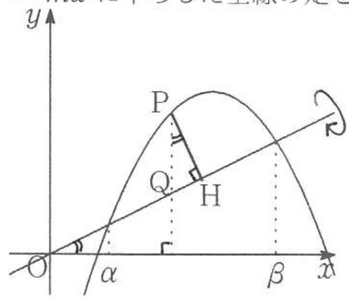
$$V=\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta PQ^2\,dx=\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{f(x)-mx\}^2\,dx$$

実におもしろい証明やなぁ　スゲ〜　■

上の証明は，ちょっとアバウトすぎるので，きちんと証明してみます．

例題 1. をそのまま一般化するだけです．

解　図のように点 $P(x,\ f(x))$ をとり，点 P から $y=mx$ に下ろした垂線の足を H とする．



あくまでも回転軸に垂直に切って回転軸にそって積分します。

$OH=t$ とすると，求める体積は，

$$\pi\int_{t_1}^{t_2}PH^2\,dt\quad(OA=t_1,\ OB=t_2)$$

まさにセオリー通り

$PQ=f(x)-mx(=h(x)$ とおく$)$，$\angle QPH=\theta$ より，

$PH=PQ\cos\theta=h(x)\cos\theta$

$HQ=PQ\sin\theta=h(x)\sin\theta$

$OQ=\dfrac{x}{\cos\theta}$

よって，$OH=OQ+QH$ より，

$$t=h(x)\sin\theta+\frac{x}{\cos\theta}$$ ← tとxの関係式

$$\therefore\ dt=\left\{h'(x)\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right\}dx$$ ← dtとdxの関係式 これがポイントです．

よって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}PH^2\,dt$$ → 置換積分!!

$$=\pi\int_\alpha^\beta\{h(x)\cos\theta\}^2\left\{h'(x)\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right\}dx$$

$$=\pi\cos^2\theta\sin\theta\int_\alpha^\beta\{h(x)\}^2h'(x)\,dx+\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{h(x)\}^2\,dx$$

$$=\pi\cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{\{h(x)\}^3}{3}\right]_\alpha^\beta+\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{h(x)\}^2\,dx$$

$$=\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{h(x)\}^2\,dx\quad(h(\alpha)=h(\beta)=0\text{ より})$$

$$=\pi\cos\theta\int_\alpha^\beta\{f(x)-mx\}^2\,dx$$

これはこれでウマイやり方．

数学ってうまいことなってるな　■

注　斜軸回転の体積は，そんなに頻繁に出題されるわけではないので，こんな公式を覚えるよりも，「立体を回転軸に垂直な平面で切って断面積を寄せ集める」というセオリーに基づいてきちんと解く方が有益でしょう．このことは次に紹介する立体の場合に身にしみると思います．

他にもイロイロやることあるし