2　立体をナナメにまわす

立方体をその対角線を軸に回転させてできる立体の体積を考えよう．これに関しては便利な公式はないので，セオリー通りに臨むしかありません．

> 例題 2.　座標空間内で，$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，$E(1,\ 0,\ 1)$，$F(1,\ 1,\ 1)$，$G(0,\ 1,\ 1)$ を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．
>
> [2010 年京都大学 (文理共通)]

文系でも出たんっすか

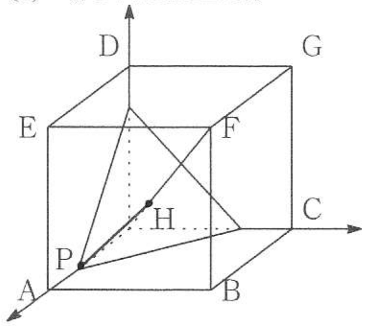
マジかよ

回転体のイメージが全くつかないかもしれませんが，**無理にイメージする必要はありません**．回転体の体積を求める時に心がけることは，回転してから断面積を考えるのではなく，

まわす前に切る．切ってからまわす　鉄則ですゾ　はーい

が原則です．まわす前の立方体の断面の様子を考えると，以下のようになります．対称性を意識しよう．

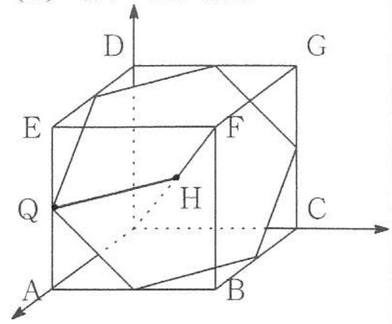
(i) 切り口は正三角形



⟶　断面は半径 PH の円

フムフム

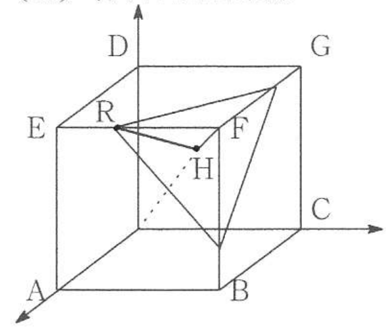
(ii) 切り口は六角形



⟶　断面は半径 QH の円

フムフム

(iii) 切り口は正三角形



⟶　断面は半径 RH の円

※なお，この部分を回転させると (i) の場合に同じ．

とても重要な考え方です

それぞれの断面を回転すると，回転軸と断面の交点 H と H から最も離れている点までの距離を半径とする円になります．最も離れている点は，線分 OA，線分 AE，線分 EF 上にあるので，結局のところ，求める体積は，線分 OA，線分 AE，線分 EF を回転してできる立体の体積に他なりません．

ナルホド～

なお，線分 OA，線分 EF を回転してできる立体は円錐，線分 AE を回転してできる立体は真ん中が凹んだ鼓のようになります．

解　線分 OF 上に $OH = t$ なる点 H をとる $(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$．$H\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}},\ \dfrac{t}{\sqrt{3}},\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$ であり，点 H を通り，OF に垂直な平面の方程式は

$$1\cdot\left(x-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+1\cdot\left(y-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+1\cdot\left(z-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\therefore\ \ x+y+z=\sqrt{3}t$$

この平面と立方体の位置関係は図 (i)(ii)(iii) のようになる．

(i) のとき，すなわち $0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

この平面と線分 OA との交点 P の座標は，$y=z=0$ として，$P(\sqrt{3}t,\ 0,\ 0)$．

よって，断面は半径 PH の円なのでその面積は

$$\pi\left\{\left(\sqrt{3}t-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\times 2\right\}=2\pi t^2$$

(ii) のとき，すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

この平面と線分 AE との交点 Q の座標は，$x=1$，$y=0$ として，$Q(1,\ 0,\ \sqrt{3}t-1)$．

よって，断面は半径 QH の円なのでその面積は

$$\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{3}t-1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$
$$=2\pi(t^2-\sqrt{3}t+1)$$

(iii) のとき，すなわち $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$ のとき

このときは図の対称性より (i) の部分の体積と同じである．

(i)(ii)(iii) より求める立体の体積は

$$2\times\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 2\pi t^2\,dt+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} 2\pi(t^2-\sqrt{3}t+1)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

■

注 (i) の部分は実質的に △OAH を回転した円錐になるので，わざわざ積分計算しなくても，体積を求めることができます．つまり，底面の半径 AH，高さ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円錐なので，$\frac{\pi}{3}\left\{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$ です．

フムフム

注 例題 1．では OH $=t$ としたとき断面積を t で表すのが困難だったので，結果的に x の積分に置換して考えました．今回は断面積が t で表すことができたのでそのまま積分したわけです．なお OH $=t$ とせずに，H の座標を H$(u,\ u,\ u)$ とおいても良いでしょう．この場合，当然，断面積は u の式になります，OH $=t$ として，回転体の体積は

$$2\times\int_0^{\frac{1}{3}}(u\text{ の式})\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(u\text{ の式})\,dt$$

となりますが，例題 1．で注意したように t と u の関係式を考えて置換積分します．この場合，$t=\sqrt{3}u$ なので，$dt=\sqrt{3}\,du$ です．この解法だと計算がかなり楽になるので，一度やっといてください．

注 この問題は古くからある有名問題で，古くは 1993 年の東工大 (後期) で出題されました．座標も何も設定してない実にシンプルな出題です．

さっきの京大と全く同じやん

> 一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうち一本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ．
>
> [1993 年東京工業大学 (後期)]

京大パクったな〜

また，2015 年には大阪市立大学で誘導つきで出題されました．

> O を原点とする座標空間内に点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ が与えられている．線分 OC を 1 つの対角線とし，線分 AB を一辺とする立方体を直線 OC の周りに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい．次の問いに答えよ．
>
> (1) 点 P$(0,\ 0,\ p)$ $(0<p\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ．
>
> (1) 点 P$(q,\ 0,\ 1)$ $(0<q\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ．
>
> (3) 原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 u $(0\leqq u\leqq\sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする．点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数で表せ．
>
> (4) K の体積を求めよ．
>
> [2015 年大阪市立大学 (前期理系)]

同じことなんやけどかえってムツかしく感じる…

シンプルにやろうよ…

問題を見れば分かると思いますが，先ほどの 例題 2．では，最初に対角線上の点を設定して，正方形との交点を考えましたが，今回は逆に，正方形上の点から，回転軸へ下ろした垂線を考えていますが，結局 (4) で同じことになっています．

以下に，答えだけを紹介しておくので，各自で解いてみてください．

はーい，やりませーん

解

(1) H$\left(\frac{p}{3},\ \frac{p}{3},\ \frac{p}{3}\right)$，　PH $=\frac{\sqrt{6}}{3}p$

(2) I$\left(\frac{1+q}{3},\ \frac{1+q}{3},\ \frac{1+q}{3}\right)$，

QI $=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{q^2-q+1}$

(3)

$$r=\begin{cases}\sqrt{2}u & \left(0\leqq u\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ \sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\ \sqrt{6}-\sqrt{2}u & \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$