大阪大学からのお便り

今度は、どんなお便りかなー

大阪大学から次の『お便り』が届きました．今の段階で何とか解読できそうです．挑戦してみましょう．

大阪大学入試問題（1996 年度前期理系）

n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1)　不等式 $n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ．

ム、ムズそう…

考え方 (1) の不等式を見たときに「面積で証明しよう」と思うかどうか，が運命の分かれ道です．そう思えば内容的には授業でやった問題と同レベルでしょう．使う関数もなんとなく分かるはず．(2) は (1) の不等式を利用して極限値を求める問題ですから，言うまでも無く「ハサミウチの原理」です．

フムフム

(1)　下図の長方形の面積の総和は斜線部分の面積よりも大きいので，

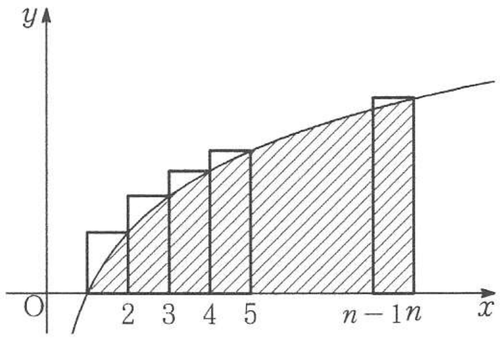
$$\int_1^n \log x\,dx<\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$$

$$\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^n<\sum_{k=2}^{n}\log k$$

$$n\log n-n+1<\sum_{k=2}^{n}\log k$$

$\log 1=0$ なので，右辺に加えて，

$$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k$$



図の網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きいので，

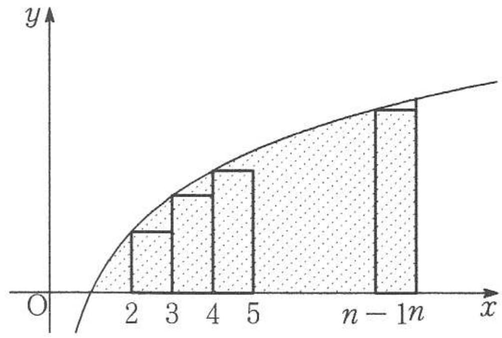
$$\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log(n-1)<\int_1^n \log x\,dx$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\log k<\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^n$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\log k<n\log n-n+1$$

$\log n$ を両辺に，$\log 1=0$ を左辺だけに加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$$



したがって，以上より，$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成立する．

なるほどー
うまいこと
なっとるねえ

(2)　$\log(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=\dfrac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k$ なので，(1) の不等式の各項を $n\log n$ で割ると，

logをつける
ことが ポイント

$$1-\frac{n-1}{n\log n}<\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k<\frac{n+1}{n}-\frac{n-1}{n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-1}{n\log n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1-\frac{1}{n}}{\log n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n-1}{n\log n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1-\frac{1}{n}}{\log n}\right)=1.$$

したがって，ハサミウチの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k\right)=1.$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log(n!)^{\frac{1}{n\log n}}\right)=1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=e.$

■

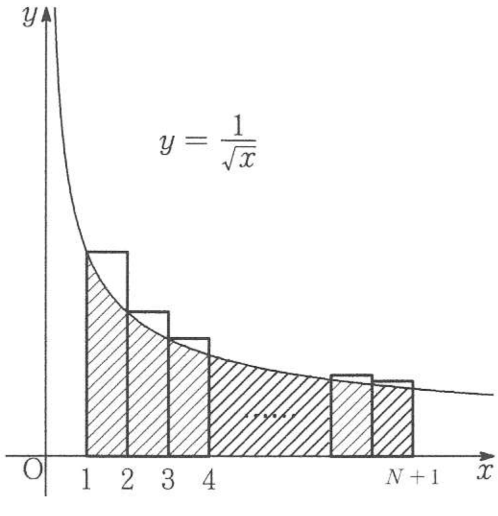
大阪大学入試問題（2014 年度前期理系）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ．

うわぁ〜
かわった問題や

考え方　なんとシンプルで短文の問題なのでしょうか．しかも発想力を要する問題です．常識的に考えて $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の値を実際に計算することは不可能ですね．「ある数 A の整数部分が m である」ということを式で表すとどうなるのでしょうか．それは「$m\leqq A<m+1$ が成立する」です．つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ を連続する 2 整数で挟めばよいのです．となれば，やっぱり「面積比較」です．以下，$N=40000$ とします．

下図の長方形の面積の総和は斜線部分の面積よりも大きいので，

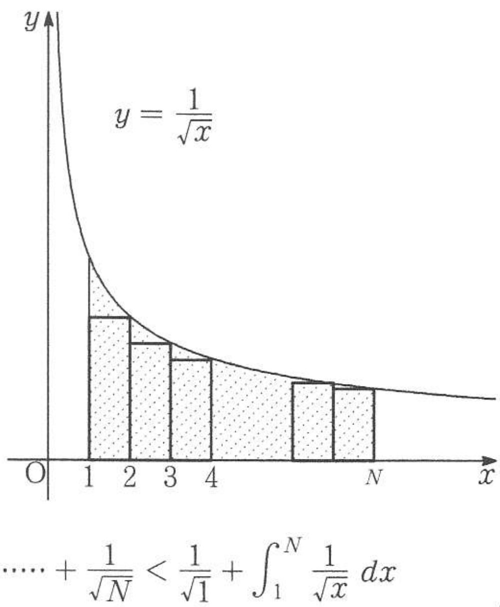
$$\int_1^{N+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}$$



下図の網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きいので，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}<\int_1^{N}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\int_1^{N}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



したがって，以上より，$\displaystyle\int_1^{N+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\int_1^{N}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{N+1}<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{N}\qquad\therefore\ 2(\sqrt{N+1}-1)<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{N}-1$$

このへんまでは
さっきと同じ…
一体どーなる？

ここで，$N=40000$ を代入して数値計算すると，

$$2(\sqrt{40001}-1)>2(\sqrt{40000}-1)=2\cdot199=398$$
$$2\sqrt{40000}-1=2\cdot200-1=399$$

これも、びっくりや
うまいこと
なっとる!!

したがって，$\displaystyle 398<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$ となり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398 であることがわかる．■

ヤッホーイ
お見事!!

これで
阪大合格や