r^n の極限について

指数関数型なのね
フムフム

これまで様々な数列の極限について考えてきましたが，この章では数列 $\{r^n\}$ に限定して考えます．

$$\{r^n\}\ :\ r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots\cdots,\ r^n,\ \cdots\cdots\cdots,\ \longrightarrow\ \boxed{\quad ?\quad}$$

いわゆる，初項 r，公比 r の無限等比数列の極限です．$\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ はどのようになるのでしょうか．
まずは具体的に書き出して，どのようになるのか予想してみよう．　はーい 具体的に考えまーす

(i)　$r=2$ のとき，つまり 2^n の極限

$2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad 128,\quad 256,\quad 512,\quad 1024,\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ どんどん，ひたすら，いくらでも大きくなっていく．　あたりまえだ

(ii)　$r=1$ のとき，つまり 1^n の極限

$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ ぜ〜んぶ 1．つまり 1 に収束．　つまんね〜

(iii)　$r=\dfrac{1}{2}$ のとき，つまり $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ の極限

$\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{8},\quad \dfrac{1}{16},\quad \dfrac{1}{32},\quad \dfrac{1}{64},\quad \dfrac{1}{128},\quad \dfrac{1}{256},\quad \dfrac{1}{512},\quad \dfrac{1}{1024},\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ どんどん 0 に近づいていく．　そりゃそうや

(iv)　$r=0$ のとき，つまり 0^n の極限

$0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ ぜ〜んぶ 0．つまり 0 に収束．　つまんね〜

(v)　$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき，つまり $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ の極限

$-\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{4},\quad -\dfrac{1}{8},\quad \dfrac{1}{16},\quad -\dfrac{1}{32},\quad \dfrac{1}{64},\quad -\dfrac{1}{128},\quad \dfrac{1}{256},\quad -\dfrac{1}{512},\quad \dfrac{1}{1024},\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ 正と負が入れ代わりつつも，どんどん 0 に近づいていく．(iii) や (iv) とは明らかに違う．　フムフム

(vi)　$r=-1$ のとき，つまり $(-1)^n$ の極限

$-1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ $+1$ と -1 が交互に続く．大きくなったり小さくなったり，特定の値になるわけでもない．　いったりきたり…

(vii)　$r=-2$ のとき，つまり $(-2)^n$ の極限

$-2,\quad 4,\quad -8,\quad 16,\quad -32,\quad 64,\quad -128,\quad 256,\quad -512,\quad 1024,\quad \cdots\cdots$

$\longrightarrow$ 正と負が入れ代わりながら，ものすごく大きくなったり，ものすごく小さくなったりしていく．特定の値になるわけでもない．　やばいやつや

これらの例からもわかるように，r^n の極限値の様子は，r の値によって分類できそうです．まとめておこう．

▷Point◁

r^n の極限値

とても大切だよ

$\lim_{n\to\infty} r^n$ は r によって次のように分類される．

(i)	$r>1$	のとき	∞ に発散
(ii)	$r=1$	のとき	1 に収束
(iii)	$0<r<1$	のとき	0 に収束
(iv)	$r=0$	のとき	0 に収束
(v)	$-1<r<0$	のとき	0 に収束
(vi)	$r=-1$	のとき	振動
(vii)	$r<-1$	のとき	振動

この r による場合分けは非常に重要なので，具体例と共にしっかりと覚えておこう．

注 この分類の証明は教科書に載っているので，勝手に見といてください． はーい 見ませ～ん

結果だけに注目して，次のようにコンパクトに分類してもかまいません．

だいぶ スッキリ したけど…

(ア)	$r>1$	のとき	∞ に発散
(イ)	$r=1$	のとき	1 に収束
(ウ)	$-1<r<1$	のとき	0 に収束
(エ)	$r\leqq -1$	のとき	振動

これで エエやん

(iii), (iv), (v) は全て「0 に収束」ですがそれぞれ 0 への「行き方」が違うし，同様に，(vi), (vii) も同じ「振動」ですが，振動の仕方が全く違うので，僕は細かく分類するのが好きです．

例 題 1. 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ (2) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ (3) $\dfrac{1}{(-2)^n}$

解 (1) $\dfrac{3}{2}>1$ より，∞ に発散．

(2) $-1<-\dfrac{3}{4}<1$ より，0 に収束．

(3) $\dfrac{1}{(-2)^n}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ より，0 に収束．

この変形が ポイントですね

■

注 (2) の $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ は，r^n の形ではありませんが，$n\longrightarrow\infty$ のとき，$n-1\longrightarrow\infty$ だから，n も $n-1$ も同じことです． そりゃ そうやな

注 (3) でよく勘違いするミスは，「$(-2)^n$ が振動するので，$\dfrac{1}{(-2)^n}$ も振動する」と考える人が多いことです．確かに，$(-2)^n$ は収束せずに振動するのですが，$+\infty$ と $-\infty$ で振動するのだから，$\dfrac{1}{(-2)^n}$ はいずれにせよ 0 に収束するのです．注意しよう．

これは ひっかかり やすいな

例 題 2. 次の無限等比数列の極限を調べよ．

(1) 3, 9, 27, 81, ……

(2) -2, $\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{8}{9}$, $\dfrac{16}{27}$, ……

解 (1) 初項 3，公比 3 なので，一般項は 3^n. $3>1$ より，∞ に発散．

(2) 初項 -2，公比 $-\dfrac{2}{3}$ なので，一般項は $-2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. $-1<-\dfrac{2}{3}<1$ より，0 に収束．

楽勝～ ■

注 公比だけを見れば極限が分かるので，わざわざ一般項を求める必要はありません．

例 題 3. 次の極限を求めよ．

(1) $\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n-5^n\}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n}{2^n-1}$

考え方 まずは，いずれもヤバイ形であることに注意しよう．何がヤバイかわかりますか？ (1) は，(振動) $-\infty$ なんてワケわかんない形だし，(2) もまず分子が $\infty-\infty$ なのでヤバイ！ それに分数型 $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ なのでさらにヤバイ！ではどうするのか？以前にやった $\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\infty-\infty$ の処理方法を思い出そう．

解 (1)

$$\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n-5^n\}=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{\left(-\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}$$

なるほどネ 5ⁿでくくり出すのか

$5>1$ なので，$\lim_{n\to\infty}5^n=\infty$.

$-1<-\dfrac{3}{5}<1$ なので，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n=0$.

うまいこと なってる～

したがって，もとめる極限値は $-\infty$.

(2) 分母分子を 4^n で割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3^n}{4^n}}{1+\frac{3^n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

もう分かったよ～

$-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

したがって，求める極限値は $\dfrac{4-0}{1+0} = 4$.

(3) 分母分子を 2^n で割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ より分母は 1 に収束するが，

$-\dfrac{3}{2} < -1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ は振動するので．求める極限値は存在しない．

フムフム

■

注 (1) で，もし，$(-3)^n$ でくくりだすと，

$$\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n - 5^n\} = \lim_{n\to\infty}(-3)^n\left\{1-\left(-\frac{5}{3}\right)^n\right\}$$

となり，(振動)×(振動) というワケわかんない形になってしまいます． こりゃ ムリやわ

また，(2) で，もし，分母分子を 3^n で割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n + 1}$$

となりますが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$ なので，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形が解消されておらず失敗です． これも ムリ〜

これらのことからもわかるように，変形して $\bigcirc^n$ の形にする際，$-1 < \bigcirc \leqq 1$ にすることがポイントのようです (0 か 1 に収束するから).

なーんだ そんな気が したわ〜

しかしながら，(3) で，もし，$(-3)^n$ で割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

となり，確かに分母は 0 に収束しますが，$\dfrac{1}{0}$ というワケわかんない形が登場して失敗です．

変形して $\bigcirc^n$ の形にする際，$-1 < \bigcirc \leqq 1$ にすることがポイントとは言うものの，**必ずしもそうではない**のです．状況により判断するしかありません．

ガーン マニュアルが 通用しねえ〜

マニュアルに頼るのではなく，「とりあえずやってみる．ダメならやり直す」という姿勢が大切です．

▷Point◁

> 変形して $\bigcirc^n$ の形にする際，$-1 < \bigcirc \leqq 1$ にすることがポイントではあるが，**必ずしもそうではない**．状況により判断するしかない．

さて，話を r^n の極限に戻します．

r^n が収束するための条件は次のようになります．

▷Point◁(**超重要**)

> r^n が収束する $\iff$ $-1 < r \leqq 1$
>
> 大切だよ

言うまでもなく $-1<r<1$ のとき 0に収束し $r=1$ のときは 1に収束はす

これはかなり重要なので頭に入れておこう．

> **例題 4.**
> 無限等比数列 2，x，$\dfrac{x^2}{2}$，$\dfrac{x^3}{4}$，… が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

解 初項 2，公比 $\dfrac{x}{2}$ の等比数列なので，一般項は $a_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

収束するための条件は，$-1 < \dfrac{x}{2} \leqq 1$ である．

$-1 < \dfrac{x}{2} < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\dfrac{x}{2} = 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

以上より，収束する条件は $-2 < x \leqq 2$.

$-2 < x < 2$ のとき，極限値は 0

$x = 2$ のとき，極限値は 2

カンターン ナットク!!

■

> **例題 5.** 数列 $\{x(x^2-5x+5)^{n-1}\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

考え方 これは初項 x，公比 x^2-5x+5 の等比数列です．先ほどは初項 2，公比 $\dfrac{x}{2}$ だったので，公比だけに注目しましたが，今回は初項が x なので，この部分も考慮する必要があります．

ムムム…

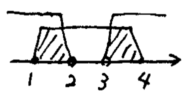
解 一般項は $a_n = x(x^2-5x+5)^{n-1}$. よって

☆ (i) $x = 0$ のとき，常に 0 に収束する． ← よく忘れる

(ii) $x \neq 0$ のとき，収束するための条件は，$-1 < x^2-5x+5 \leqq 1$.

$-1 < x^2-5x+5$ より，$x < 2,\ 3 < x$.

$x^2-5x+5 \leqq 1$ より，$1 \leqq x \leqq 4$.



よって，$1 \leqq x < 2,\ 3 < x \leqq 4$. この結果は $x \neq 0$ を満たしている．

(i)(ii) より，収束するための条件は，
$x=0,\ 1 \leqq x < 2,\ 3 < x \leqq 4$.
極限値は
$x=0,\ 1<x<2,\ 3<x<4$ のとき 0 に収束，
$x=1$ のとき 1 に収束，$x=4$ のとき 4 に収束．

■

例題 6.
r は定数とする．次の数列の極限値を求めよ．
(1) $r>0$ のとき，$\left\{\dfrac{2}{3+r^n}\right\}$
(2) $r \neq -1$ のとき，$\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$

考え方 要するに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}$ を計算せよということです．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は r によって分類されるので，r で場合分けせねばなりません．

解 (1)

(i) $r>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ なので，

(1)は楽勝〜
ナットク!!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=0$$

(ii) $r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $0<r<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}$$

(2)

(i) $r>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

(ii) $r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $-1<r<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

☆ (iv) $r<-1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は $+\infty$ か $-\infty$ で振動するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$ ← ポイント

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

■

注 (iv) で，「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は振動するから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}$ も振動する」と考える人がいますが違います．**例題 1.**(3) を参照のこと．

あー
さっきもあった
よくミスる
やつや

なお，$r<-1$ のとき，$-1<\dfrac{1}{r}<1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ と考えても構いません．

最後に，r^n の極限の分類で，細かく分類することのありがたみを実感する問題を紹介しよう．

例題 7.
$r \neq 0$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{r^n}\right\}$ の極限を調べよ．

カンタン
そうですが…

解

(i) $r>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$$

(ii) $r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=1$$

(iii) $0<r<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるが，これは，正の数を保ちつつ 0 に近づいているので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\infty$$

これは
イメージしにくいなー

(iv) $-1<r<0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるが，これは，正の数か負の数か変動しながら 0 に近づいているので，

(iii)と(iv)の違いが
ポイントのようです

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\text{ は振動する}$$

ムズい…

(v) $r=-1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は $+1$ か -1 で振動するので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\text{ は振動する}$$

(vi) $r<-1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は $+\infty$ か $-\infty$ で振動するので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$$

これは
さっきと同じ…

■

注 非常に間違えやすい問題です．しっかりとイメージできるように．