積分計算のキホン

積分のスタートや
気持ち切りかえて
ガンバルぞ〜

♪ ビブン
セキブン
イイキブン ♪

オー

1 数学 II の復習

微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の**不定積分**といい $\int f(x)\,dx$ と表します．$f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**といいます．つまり 積分とは微分の逆 です．

例えば「$3x^2$ の不定積分は？」と言われれば，「微分すると $3x^2$ になる関数は何ですか？」という意味です．この場合，x^3 や x^3+1，x^3-2，$x^3+\sqrt{3}$，…… など，いろいろあります．よって，

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$x^3 + C \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} 3x^2$$

互いに逆関係になっているのです

と定数付きで表現します．つまり不定積分は定数の違いだけで無数にあります．だから「不定」という言葉が付いているのです．多すぎて 1 つに定まらない，というわけです．

注 「積分は微分の逆」と言いましたが 実はそう単純な話ではありません．そのうち真実を教えます．

参考 「微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の不定積分という」と定義しましたが，どんな関数にも必ず不定積分が存在するのでしょうか．つまり，微分するとその関数になるような関数が絶対にあると断言できるのでしょうか．実は「不定積分は存在するが，具体的に表すことはできない」という場合があります．「あるのに見せられない」というおかしな状況です．例えば，不定積分 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ や $\int e^{-x^2}\,dx$ などは，シンプルな式であるにも関わらず，これらの原始関数は高校で習う関数では表すことができません．

でも，こんなヤバイ関数は高校レベルでは登場しないので安心してください (大学で学びます)．

安心したよ

よかったー

2 基本関数の積分

数学 II では，2 次関数や 3 次関数だけを扱いました．だから微分や積分の計算もラクなもんでした

すでに数学 III の微分を経験した皆さんは，うすうす感じていると思いますが，数学 III では，多種多様な関数がワンサカ登場するので，積分計算も想像を絶するほどメンドクサクなります．

まずは，以下の微分の関係式から導かれる積分公式を 完全に暗記していただきます.

暗記きらーい

えへ

不定積分の基本公式 (全て完璧に暗記すること)　(C は積分定数)

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha \iff \int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \text{ は } \alpha \neq -1 \text{ なる実数})$$

$\alpha=-1$ の場合が $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ です。

$$(\sin x)' = \cos x \iff \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x \iff \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \iff \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \iff \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

これは無条件でとにかくおぼえてほしい

$$(e^x)' = e^x \iff \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$(a^x)' = a^x \log a \iff \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

これがミスりやすいので要注意!!

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \iff \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

真数部分の絶対値を忘れないように

ようするに積分公式は微分公式の裏がえしなんだからその都度微分してチェックすれば無理に暗記する必要はありません

そりゃそうやわ

➾注 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ について．　なんで絶対値つくの〜？

「$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ でもあるから，絶対値なんてつけずに $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$ でエエんとちゃうの．なんで絶対値がつくねん」って不思議に思うかもしれません．実際問題として，不定積分の計算では，絶対値があってもなくてもあんまり影響ないのですが，定積分の計算（面積などの計算）になると絶対値がないとヤッカイなことが起こるのです．まあ，今はあんまり気にせんと，とにかく絶対値をつけといてください．

➾注 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ や $\displaystyle\int \log x\,dx$ なども基本関数に入れてよい気がしますが，実はこれらの不定積分は，ちょっとした工夫が必要です．ある事をしないと計算できません（後ほど教えます）．つまり，見た目がシンプルな関数でも積分計算が難しかったり，逆に，見た目が複雑そうな関数でも意外と簡単に積分計算できたりする場合もあるのです．そこが積分計算の面白いところで，まるでパズルのようです．

ふ〜ん　ゲーム感覚でやろう

▷Point◁（積分計算の心構え）

① 積分した後に，微分して元に戻るか必ず確認する習慣を付けよう．

$f(x)$ を積分すると $F(x)$ になる $\iff$ $F(x)$ を微分すると $f(x)$ になる

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \iff \qquad F'(x) = f(x)$$

② 積分計算は積の形や商の形に弱い．いかにしてこれらの形を解消するかが計算のポイント．
今のところは展開したりして乗り切るしかないが，後ほどうまい方法を伝授する．

③ 落ち着いて最後まで計算し尽すこと．あきらめないこと．くじけないこと．

うん，ぼくがんばるよ…

例題 (1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(4) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\tan x}-2\right)\sin x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}\,dx$

解 (1) まずは累乗の形に直そう．

$$\int x^2\sqrt{x}\,dx = \int x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

(2) 分数を分けて累乗の形にしよう．

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^2}\,dx$$
$$= \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) dx$$
$$= \int \left(1-\frac{3}{x}+2x^{-2}\right) dx$$
$$= x - 3\log|x| + \frac{2}{-2+1}x^{-2+1} + C$$
$$= x - 3\log|x| - 2x^{-1} + C$$

(3) まずは展開しよう．

$$\int \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$
$$= \int \sqrt{x}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \int \left(\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + 2x + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

落ち着いて展開しよう。

決してムツカシくないよ

(4) 一瞬，戸惑うけど，落ち着いて展開すれば・・・

$$\int \left(\frac{1}{\tan x}-2\right)\sin x\,dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}-2\right)\sin x\,dx$$
$$= \int (\cos x - 2\sin x)\,dx$$
$$= \sin x + 2\cos x + C$$

お見事!!

(5) これも，一瞬，戸惑うけど・・・

$$\int \frac{1}{\tan^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right) dx$$
$$= -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

ナルホド〜

これはなかなか思いつかんわ

でもオモロイ