接線の話（数学 III 編）

数学 III バージョンの接線の話をしますが，扱う関数が複雑になるだけで，基本的な概念，手法は数学 II と同じです．だから，まずは2年生の授業で配布した『接線の話』のプリントの内容をしっかりと理解しておこう．

はーい  まずは数学IIの接線が基本となります

1　曲線上の点における接線

例題 1.　$y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(e,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

考え方　基本問題．何も申すことございません．

解　$y'=\dfrac{1}{x}$ より，点 A における接線の傾きは $\dfrac{1}{e}$．よって，点 A における接線の方程式は

$y-1=\dfrac{1}{e}(x-e).\qquad \therefore\quad y=\dfrac{1}{e}x.$ ■

OK  これは完ペキ!!

2　曲線上以外の点から引いた接線

例題 2.　$y=e^{2x+1}$ に原点から引いた接線の方程式を求めよ．

考え方　接線は「通る点」と「傾き」で決まり，傾きは「接点の x 座標」で決まります．よって，まずは接点を設定することから始まります．セッテンセッテー！

解　$y=e^{2x+1}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t+1})$ における接線の方程式は，$y'=2e^{2x+1}$ より，

$$y-e^{2t+1}=2e^{2t+1}(x-t)\ \cdots ①$$

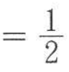
これが原点を通るから，

$-e^{2t+1}=-2te^{2t+1}$

$e^{2t+1}(2t-1)=0$

$e^{2t+1}>0$ より，$t=\dfrac{1}{2}$．

"セッテンセッテー" 必ずおぼえとこう

はーい 

よって，求める接線の方程式は，① に $t=\dfrac{1}{2}$ を代入して

$y=2e^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+e^2=2e^2x$ ■

3　陰関数の接線

例題 3.　次の曲線上の与えられた x 座標をもつ点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\quad(x=\sqrt{3})$

(2)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\quad(x=4)$

どんな図形になるのかな？  う～ん

考え方　$y=f(x)$ タイプの関数の接線はすでに学んでいるので，それに従うのならば，例えば (1) の場合，まず式変形して

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \iff y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

とし，$y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ を微分すればよいのですが，少しメンドウです．曲線上の点の場所に応じて，$y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ と $y=-\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ のどちらを用いるのかを考えねばなりません（まあできなくはない．『微分のココロ』P29～P30 参照）．

もちろん『陰関数微分法』を利用して，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めます．$\dfrac{dy}{dx}$ は x と y の式になるので，その x と y に値を代入すれば，その点における接線の傾きが求められます．

解

(1)　$x=\sqrt{3}$ のとき $y^2=\dfrac{1}{4}$ より，$y=\pm\dfrac{1}{2}$．

つまり，接点は $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$．

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{2x}{4}+2yy'=0.\qquad \therefore\quad y'=-\frac{x}{4y}.$$

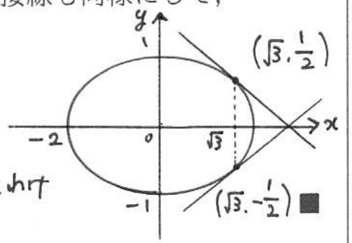
y′がxとyで表わされています

したがって，点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{\sqrt{3}}{4\cdot\frac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．よって，接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})\qquad \therefore\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$$

点 $\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線も同様にして，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-2$$



できた〜　　2本あったわけです ■

(2) $x=4$ のとき $\sqrt{y}=3$ より，$y=9$．

つまり，接点は $(4,\ 9)$．

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=25$ の両辺を x で微分すると，

陰関数微分って便利やな

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0. \qquad \therefore\quad y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

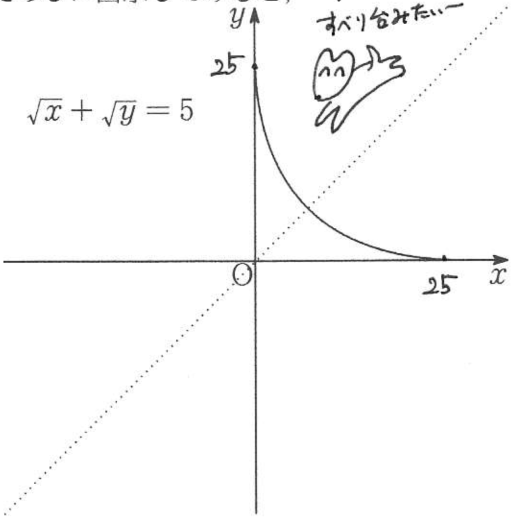
したがって，点 $(4,\ 9)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=-\dfrac{3}{2}$．よって，接線の方程式は

$$y-9=-\frac{3}{2}(x-4) \qquad \therefore\quad y=-\frac{3}{2}x+15$$

■

参考 言うまでもなく，(1) は楕円を表していますが，(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ はどういう図形を表しているのでしょうか．

ためしに図示してみると，　ワ〜イ すべり台みたい〜



となります．一見，「双曲線か？」と思ってしまいますが違います．実は，この曲線は放物線（の一部）なのです．詳しくいうと，「ある放物線を原点中心に 45° 回転したもの」です．では，どういう放物線を回転させたものなのか，もとの放物線の式はどのようにして求めるのか，というと，複素数平面の回転や旧課程の 1 次変換の知識が必要になってくるので，この場では省略します．

エッ マジっすか

エ〜ッ 知りたいな〜

4　媒介変数表示された関数の接線

媒介変数表示された関数については，積分のところで詳しく学習するので，今のところは取り立てて学ぶ必要はありません．気になる人は『微分のココロ』P26〜P27 を参照のこと．

例題 4. 次の媒介変数表示された関数について，$t=-\dfrac{\pi}{6}$ の値に対応する点における接線の方程式を求めよ．

$$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin t+1 \end{cases}$$

考え方 媒介変数表示とは，x と y の間の関数関係を，直接的ではなく，t を介して間接的に表現したものです．t にいろいろな値を代入することで x と y の値が定まり，それらをつないでいくと曲線が得られるのです．

下に t を 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化させたときの x と y の値を表にまとめてました．

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
x	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	← x座標
y	1	$\frac{\sqrt{3}+2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+2}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	← y座標

この表だけでは点をつないでいくのはしんどいかもしれませんが，もっとたくさんの t をとって図示すると下図のようになります．