注　この図を見れば，

$x = \cos 2t$ で，$-1 \leqq \cos 2t \leqq 1$ なので，$-1 \leqq x \leqq 1$

$y = \sin t + 1$ で，$-1 \leqq \sin t \leqq 1$ なので，$0 \leqq y \leqq 2$

となることも納得できると思います．

注　t の変化に伴って点 $(x,\ y)$ がどのように動いているのか，について，もうちょっと，詳しく見てみることにしよう．まず，

$x = \cos 2t$ なので，x 座標の周期は π，

$y = \sin t + 1$ なので，y 座標の周期は 2π．

このことから，t が 0 から 2π まで変化すると，x は 2 サイクル，y は 1 サイクル変化することがわかります．

実際，t が 0 から 2π まで変化するときの点の移動の様子は，図のように，点 A，B，C を定めると，

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	1	-1	1	-1	1
y	1	2	1	0	1
点	B	A	B	C	B

前ページのグラフを見ながら点の動きを追っかけてみよう

はーい

となります．必ず各自で点の移動の様子を目で追ってください．

注　今回の場合は，比較的に点の移動が単純でしたが，もっと複雑な動きをする点もあって，なかなか軌道を追うが難しいのですが，「t にいろいろ代入して点をプロットしていく」という姿勢は変わりません．まあ，そのうちできるようになります．

さて，媒介変数表示された関数の微分公式に基づき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めます．$\dfrac{dy}{dx}$ は t の式になるので，その t に値を代入すれば，その点における接線の傾きが求められます．

解　$t = -\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ y &= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

つまり点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通っていることを意味してます。

また，$\dfrac{dx}{dt} = -2\sin 2t$．$\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-2\sin 2t} = -\frac{1}{4\sin t}$$

2倍角の公式を使いました。

したがって，$t = -\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}$$

これが接線の傾き

求める接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right). \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

■

参考　グラフの形を見て，うすうす気づいていると思いますが，この曲線は放物線です．

なんとなく思ってたよ

今回の場合，媒介変数 t を消去して x と y の関数関係を作ることができます．

解（別解）

$$\begin{cases} x = \cos 2t & \cdots\cdots ① \\ y = \sin t + 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，$x = 1 - 2\sin^2 t$． …… ①′

② より，$y - 1 = \sin t$． …… ②′

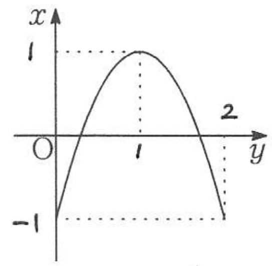
よって ②′ を ①′ に代入して，

$$x = 1 - 2(y-1)^2$$

$$\therefore \quad x = -2y^2 + 4y - 1$$

なーんや フツーの2次関数か

悩んで損したわ



たて軸が x, よこ軸が y と考えます.

したがって，$\dfrac{dx}{dy} = -4y + 4$

逆関数の微分法より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{-4y + 4}$

$t = -\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$y = \dfrac{1}{2}$ なので，求める接線の傾きは，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$．

■

注　媒介変数を消去すれば確かに 2 次関数の式が登場しました．しかし，媒介変数がいつも消去できるとは限りません（むしろ，消去できないことの方が多い）．今回の場合は，ホンマにたまたまうまく消去できただけなので，やっぱり最初の **解** で理解しておいてください．

はーい

でないと数III の意味ないよな

参考 ここで，2 次曲線の接線についてまとめておこう．いずれも 絶対暗記事項 です．

はーい

▷Point◁ (2 次曲線の接線)

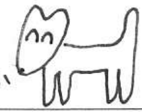
① 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線は，$px+qy=r^2$.

② 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線は，$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$.

③ 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線は，$\dfrac{px}{a^2}-\dfrac{qy}{b^2}=\pm1$.

④ 放物線 $y^2=4ax$ 上の点 $(p,\ q)$ における接線は，$qy=2a(x+p)$

グラフは各自で
書いといてね～



はーい　OK

これらの公式はテスト等で無条件に利用して構いませんが，「なぜその式になるのか」という理由，証明が大切です．いちおう，② と ④ の場合だけ証明しておきます．その他の場合も必ず各自で証明しておいてください．なかなか良い練習になります．

② の証明

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると，

陰関数
微分です

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \qquad \therefore \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

したがって，点 $(p,\ q)$ における接線の傾きは $-\dfrac{b^2p}{a^2q}$ だから，接線の方程式は

$$y-q=-\frac{b^2p}{a^2q}(x-p)$$

$\therefore \quad b^2px+a^2qy=b^2p^2+a^2q^2$

点 $(p,\ q)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点なので．

$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ より，$b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2$.

したがって，

$$b^2px+a^2qy=a^2b^2$$

$$\therefore \quad \frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

文字が多くて
ゴチャゴチャしてるけど
やってることは単純

うん．できる．

■

④ の証明

$y^2=4ax$ の両辺を x で微分すると，

これも
陰関数
微分です

$$2yy'=4a. \qquad \therefore \quad y'=\frac{2a}{y}.$$

したがって，点 $(p,\ q)$ における接線の傾きは $\dfrac{2a}{q}$ だから，接線の方程式は

$$y-q=\frac{2a}{q}(x-p)$$

$\therefore \quad qy-q^2=2a(x-p)$

点 $(p,\ q)$ は $y^2=4ax$ 上の点なので．

$q^2=4ap$ より，

$$qy-4ap=2a(x-p)$$
$$qy=2ax-2ap+4ap$$
$$\therefore \quad qy=2a(x+p)$$

う～ん．ちょっと
不思議な形やね

へんな感じ…

■

参考 円，楕円，双曲線の場合は簡単に憶えられそうですが，放物線の場合が憶えにくいようです．次のように考えればよいでしょう．

そうそう

まず，円，楕円，双曲線の場合の憶え方について．

この場合は元の式で，x^2 を px に，y^2 を qy に変えただけなんですが，これは，積 $x\times x$ が $p\times x$ に，積 $y\times y$ が $q\times y$ になったと見ると，同じ文字の積を 1 個だけ x を p に，y を q に入れ換えたと解釈できます．

では，放物線の場合はどうかというと，まずは

$$y^2=4ax \iff y\times y=2a(x+x)$$

$4ax$
$=2a\times2x$
$=2a(x+x)$
と
解釈して
x 1個を
p で．
おきかえます

とします．ここで左辺を積，右辺を和のようにみなして，先ほどと同様に，同じ文字の積や和を 1 個だけ x を p に，y を q に入れ換えたと解釈するのです．つまり

$$qy=2a(x+p)$$

ちょっとゴーインやわ

うへん
ビミョー

となります．

これで少しは憶えやすいでしょうか．