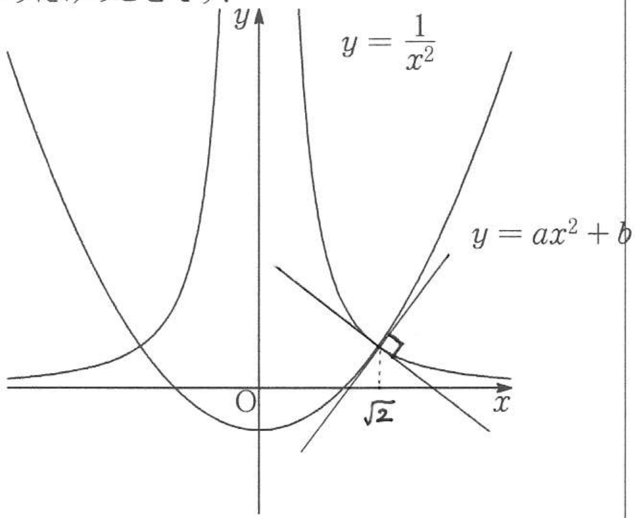
それでは，接線に関する重要問題を 4 問紹介しよう．

例題 5. 2 つの曲線 $y=ax^2+b$ と $y=\dfrac{1}{x^2}$ が点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で交わり，この点における接線が直交するとき，定数 a，b を求めよ．

考え方 ようするに，2 つの曲線 $y=ax^2+b$ と $y=\dfrac{1}{x^2}$ の $x=\sqrt{2}$ における接線が直交しているというだけのことです．



解 $f(x)=ax^2+b$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ とおく．

$f'(x)=2ax$，$g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$

2 つの曲線 $y=ax^2+b$ と $y=\dfrac{1}{x^2}$ の $x=\sqrt{2}$ における接線が直交するので，$f'(\sqrt{2})\cdot g'(\sqrt{2})=-1$ より，

$$2a\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)=-1.\qquad \therefore a=\frac{1}{2}.$$

また，$f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2}=2a+b$$

$a=\dfrac{1}{2}$ を代入して，$b=-\dfrac{1}{2}$ ■

問題文の指示どうりに
立式して計算するだけ
ok
そんなに
ムズくないぞ

注 「2 直線が直交するとき，傾きの積が -1 になる」ことは 2 直線が x 軸，y 軸に平行な場合は成立しません．この問題ではそんな状況にはならないのですが，一言述べておいた方がより丁寧でしょう．

注 $y=ax^2+b$ と $y=\dfrac{1}{x^2}$ は共に y 軸対称なグラフなので，点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で交わるならば，点 $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ でも交わり，この点における接線も直交します．

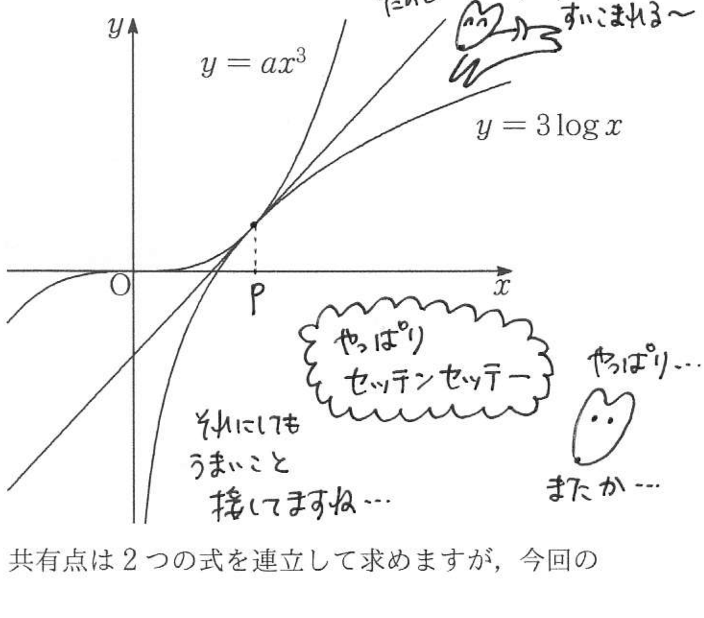
例題 6. 2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，定数 a を求めよ．また，その共有点における接線の方程式を求めよ．

考え方 「$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ において共通接線をもつ」とは，それぞれの $x=p$ における接線が一致することを意味します．接線は通る点と傾きで決まるので，$x=p$ における y 座標と傾きが等しければよいのです．つまり，

▷Point◁

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ において共通接線をもつ

$$\iff \begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases}$$



共有点は 2 つの式を連立して求めますが，今回の

場合，$ax^3 = 3\log x$ を解いて x を求めることはできません．よって，共有点の x 座標を p とでもおいて考える必要があります．

解　$f(x) = ax^3$, $g(x) = 3\log x$ とおく．共有点の x 座標を $x = p$ とおく．

$f(p) = g(p)$ より，$ap^3 = 3\log p$　…①

$f'(p) = g'(p)$ より，$3ap^2 = \dfrac{3}{p}$　…②

② より，$ap^3 = 1$．① に代入して $1 = 3\log p$．よって，$p = e^{\frac{1}{3}}$．$p^3 = e$ なので $ae = 1$ より，

$a = \dfrac{1}{e}$.

あとは，$y = 3\log x$ の $x = e^{\frac{1}{3}}$ における接線の方程式を求めればよいので，

$$y = \frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}x - 2$$

となる．■

$x = e^{\frac{1}{3}}$ のとき
$y = 3\log e^{\frac{1}{3}} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
$y' = \frac{3}{x}$ より 傾きは $\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}$
$\therefore y - 1 = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}(x - e^{\frac{1}{3}})$
スペースの都合で省略しました。大丈夫ですよね？

うっ

例題 7.　$y = x^2$ と $y = \dfrac{1}{x}$ の共通な接線の方程式を求めよ．

考え方　2 つのグラフを図示すればわかりますが，共有点での接線は一致しません．この場合の「共通接線」とは「接点が異なるが接線は同じ」ということ．したがって，$y = x^2$ 上の $x = p$ における接線と，$y = \dfrac{1}{x}$ 上の $x = q$ における接線とが完全に一致するので，2 つの接線の式の係数を比較することになります．

解

$y = x^2$ の $x = p$ における接線の方程式は，

$y - p^2 = 2p(x - p)$.　　$\therefore y = 2px - p^2$　…①

$y = \dfrac{1}{x}$ の $x = q$ における接線の方程式は，

$y - \dfrac{1}{q} = -\dfrac{1}{q^2}(x - q)$.　　$\therefore y = -\dfrac{1}{q^2}x + \dfrac{2}{q}$　…②

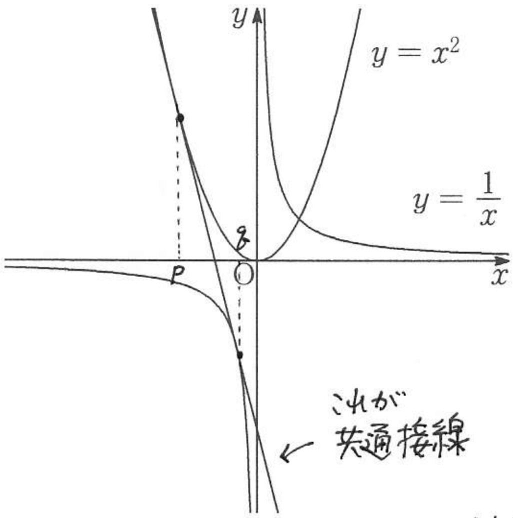
① と ② が一致するので，係数を比較して，

$$2p = -\frac{1}{q^2}, \quad -p^2 = \frac{2}{q}$$

これらを解いて，$p = -2$，$q = -\dfrac{1}{2}$.

したがって，求める接線は，$y = -4x - 4$

■



知らんかったよ

こんなとこにあったのね…

例題 8.　点 P$(a,\ 0)$ から曲線 $y = xe^x$ に接線が引けるための条件を求めよ．

どんなグラフになるのか早く知りたいな

考え方　$y = xe^x$ がどのような形のグラフなのか分からなくても解けます (もうすぐ書けるようになる)．曲線上以外の点から引いた接線を考えるときは，まずはセッテンセッテー．

解　$y = xe^x$ 上の点 $(t,\ te^t)$ における接線の方程式は，$y' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$ より，

$y = (e^t + te^t)(x - t) + te^t$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るような t が存在すればよい．つまり，$(e^t + te^t)(a - t) + te^t = 0$ を満たす t が存在するための条件を求める．

$e^t \neq 0$ より，$(1 + t)(a - t) + t = 0$．整理すると，$t^2 - at - a = 0$.

これは t についての 2 次方程式なので，この 2 次方程式が実数解をもつための条件を考えればよい．つまり，$D \geqq 0$ が求める条件である．

よって，$(-a)^2 + 4a \geqq 0$ より，$a \leqq -4$, $0 \leqq a$.

■