スペシャル定積分

スペシャルっていうくらいやから
さぞかし特別な定積分なんやろなあ

1　$\sqrt{a^2-x^2}$ がらみ

例題　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

考え方　この定積分は置換積分で計算するのですが，置換の仕方が特殊で，置換の方法を暗記していないとどうにもなりません．

解　$x=\sin\theta$ と置換すると，$dx=\cos\theta\,d\theta$.

よって，

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$
■

2倍角の公式による次数下げ

これは基本

ok

注　本来は，$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|$ となるべきところですが，積分区間が $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，$\cos\theta \geqq 0$ となり $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ となります．

逆に言えば，「$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ としたいから，積分区間を $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に設定した」のです．なぜなら，変数変換する際，$x=\sin\theta$ なので，

$x=0$ のとき $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$
$x=1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2},\ \cdots$

と，θ の値はいろいろな可能性があり 1 つに確定しません．別にどれを選んでも良いのです．しかし，その後の計算で $\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|$ が登場することを予め想定して，絶対値が外れるように (つまり $\cos\theta \geqq 0$ となるように)，θ の範囲を選んだのです．

ふ〜ん　そんな配慮があったのネ…

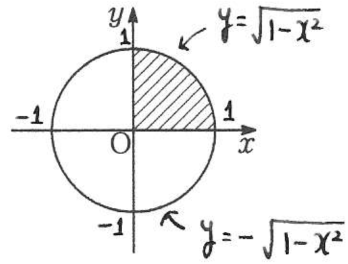
▷Point◁ (特殊な定積分)

> $\sqrt{a^2-x^2}$ がらみの定積分
> $\Longrightarrow$　$x=a\sin\theta$ と置換する．

しかしながら，実際にテストに出たらこんなメンドウな計算はしません．

$\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ なので，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ は，関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた部分の面積を表しています．

$y=\sqrt{1-x^2}$ は原点中心，半径 1 の円の上部を表しています．つまり，求める定積分は図の斜線部分の面積なので，



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi\times 1^2\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

スゲ〜 一瞬で終わった

このように定積分を図形の面積に置き換えて考えるという発想は非常に重要で，テストなどではどんどん利用して構いません．

ラッキ〜 どんどん使うで

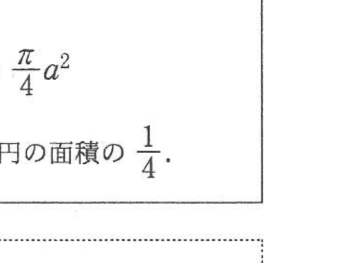
▷Point◁ (重要な公式)

> $$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}a^2$$
> $\longrightarrow$　原点中心，半径 a の円の面積の $\frac{1}{4}$.

例題　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$

考え方　言うまでもなく明らかに「円」です．

解　$y=\sqrt{3-x^2}$ は原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の円の上部を表しているから，求める面積は図の斜線部分の面積である．よって，



$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx = \pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

とってもカンタ〜ン

■

注　まともにやるなら，$x=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換し，先ほどと同様の計算をします．

$x=\sqrt{3}\sin\theta$
と置換すると，
$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$.

よって，

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3-3\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos\theta\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\\
&=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\
&=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&=3\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

メンドクサイけど
やってることは
単純です

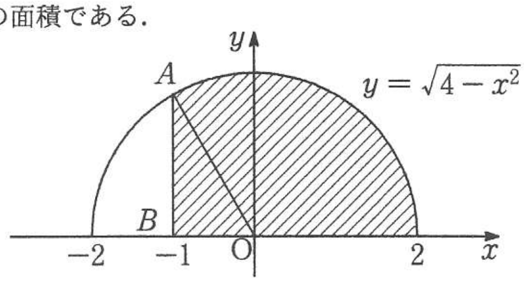
うん

■

例題　$\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

考え方　面積を利用する方法とまともに計算する方法とで解き比べてみます．

解　$y=\sqrt{4-x^2}$ は原点中心，半径 2 の円の上部である．よって，求める定積分は図の斜線部分の面積である．



図の斜線部分は中心角 120° の扇形と直角三角形 OAB に分割されるので，面積は

$$\pi\times 2^2\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，求める定積分の値は，

$$\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ヤッター

面積の利用
とてもすごいっす

■

解

$x=2\sin\theta$
と置換すると，
$dx=2\cos\theta\,d\theta$
したがって，

x	$-1 \longrightarrow 2$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2\theta)\,d\theta\\
&=\Big[\,2\theta+\sin 2\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=(\pi+0)-\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

注　積分区間のとり方に注意しよう．なぜ，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ にしたのか．それは，$\cos\theta\geqq 0$ にしたかったから．なぜ，$\cos\theta\geqq 0$ にしたかったのか．それは，$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ としたかったから，です．

ナルホド〜

以上の 2 つの **解** を比較してどうでしょうか．後半の「面積」に帰着する計算方法の方が圧倒的に優れていると思いませんか．このように定積分の計算を図形的に解釈するという考え方は非常に重要です．

そう思う
たしかに

例題　$\displaystyle\int_0^{1}\sqrt{2x-x^2}\,dx$

考え方　これまでとは式の形が違います．でも何か感じますか？

解　ルートの内部を平方完成する．
$\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

さすがに
今回は無理やろ？