$x-1=t$ と置換すると，$dx=dt$.

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$-1 \longrightarrow 0$

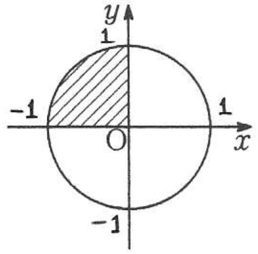
よって，

まさか置換積分するとは思わんかったわー

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

うん

つまり，求める定積分の値は，図の斜線部分の面積を表しているから，$\dfrac{\pi}{4}$ である.



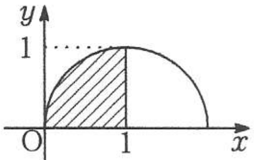
✏注 上の解答では，ルートの内部を平方完成して置換積分をしましたが，そんなことせずに，直接求めることもできます．つまり，$y=\sqrt{2x-x^2}$ とおくと，$y^2=2x-x^2$.

$$x^2-2x+y^2=0 \iff (x-1)^2+y^2=1$$

つまり，$y=\sqrt{2x-x^2}$ は $(1,\ 0)$ 中心，半径1の円の上部を表しています.

したがって，求める定積分は図の斜線部分の面積なので，

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$



これはうまい!!
お見事

このことからもわかりますが，$x-1=t$ と置換するということは結局，x 軸方向に -1 だけ平行移動するということだったわけです.

さて，このように円の面積に注目して計算する方法に慣れてしまうと，次のような問題で焦ってしまうでしょう.

例題 $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

考え方 分母部分に円らしき式が見えていますが，$y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ は円ではありません．ということは，面積を考えてサクッとやることはできないのです．$x=4\sin\theta$ と置換してコツコツ計算するしかありませんが，意外にも計算はラクです.

そうや．よく見たら"円"とぜんぜんちがうわ

$x=4\sin\theta$
と置換すると，
$dx=4\cos\theta\,d\theta$
したがって，

x	$-2 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

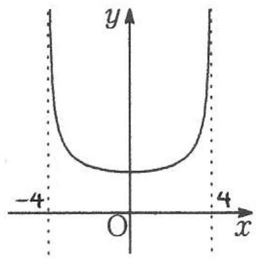
$$\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cancel{4\cos\theta}}\cdot \cancel{4\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

おーっ うまく約分できたゾ
ラッキ〜

✏注 積分区間のとり方に注意しよう.

参考 ちなみに $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ のグラフは右図のようになります.

これはこれで面白いグラフや



2 $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ がらみ

例題 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

考え方 この定積分も置換積分で計算するのですが，置換の仕方が特殊で，置換の方法を暗記していないとどうにもなりません.

ふーん．やっぱり？

解 $x=\tan\theta$ と置換すると，
$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

またまたうまく約分できました。

ラッキー

■

✎注　三角関数の相互関係

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

が効果的に用いられています．

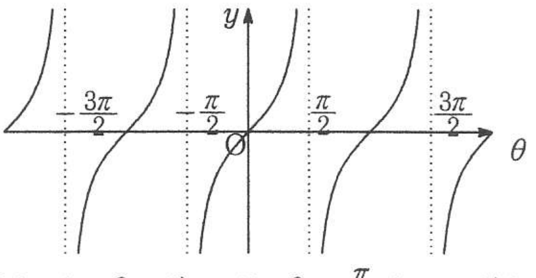
✎注　これも，うまくいきすぎてる感じがします．「なんで $x=\tan\theta$ と置換するのか」と思ったかもしれませんが，この計算過程を見せられると「確かに $x=\tan\theta$ と置換するしかないなあ」と納得するでしょう．うん，うまくいってる，いってる．

✎注　変数変換する際，$x=\tan\theta$ なので，

$x=0$ のとき $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$

$x=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{9\pi}{4},\ \cdots$

と，θ の値はいろいろな可能性があり 1 つに確定しません．$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分では「ルートがうまく外れるように」という理由で角度を選びましたが，今回はどうでしょうか．ルートも出てこないし，別にどの角度でも良さそうです．しかし，全く別の問題が生じます．それは $\tan\theta$ のグラフにあります．



つまり，$\tan\theta$ のグラフは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ で途切れているので，この部分をまたいで角度を選ぶことはできないのです．だから，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えるのです．

ナルホドー

▷Point◁（特殊な定積分）

> $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ がらみの定積分
>
> $\Longrightarrow$　$x=a\tan\theta$ と置換する．

✎注　このタイプは残念ながら「円の面積に置き換えて考える」などのスゴワザは使えませんが，計算そのものは簡単なので，セオリー通りに置換して落ち着いてやれば大丈夫です．

例題　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+3}\,dx$

解

$x=\sqrt{3}\tan\theta$

と置換すると，

$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta.$

よって，

x	1	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\cancel{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{3}\,d\theta$$

$$= \Big[\,\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{36}$$

例題　$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

考え方　「アレッ？　これまでとは分母の形が違う」と戸惑うと思いますが，4 つ前の **例題** 同様に平方完成すれば何かが見えてきます．

解　$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$

$x+1=\tan\theta$ と置換すると，

$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta.$

x	-1	$\longrightarrow$	0
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって，

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$

$$= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

計算自体はたいしたことないね

■