スペシャル不定積分

いったい，何が特別なんやろ？

不定積分の計算は，置換積分と部分積分をマスターし，不定積分計算のコツ（「次数を下げる」と「積の形を解消する」）を考えればたいてい何とかなるんですが，それでも，ヤバイ場合があります．

1　あれれ・・・戻ってくる

例題 1. $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$

考え方　e^{-x} と $\sin x$ のように全く異質な関数の積の積分はたいてい部分積分を利用することになります．この場合，部分積分を1回すると，$\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ が登場し，もう1回部分積分すると，$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ に戻ってきます．

このように，部分積分を繰り返すと，同じ形が再び戻ってくる場合があります．このままではいつまでたっても終わりませんね．じゃあ，どうするのか？

符号ミスに注意!! 落ち着いて計算しよう

解

$$\begin{aligned}
&\int e^{-x}\sin x\,dx\\
&=\int(-e^{-x})'\sin x\,dx\\
&=-e^{-x}\sin x-\int(-e^{-x})(\sin x)'\,dx\\
&=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\\
&=-e^{-x}\sin x+\int(-e^{-x})'\cos x\,dx\\
&=-e^{-x}\sin x+\left(-e^{-x}\cos x-\int -e^{-x}(\cos x)'\right)\\
&=-e^{-x}\sin x+\left(-e^{-x}\cos x-\int -e^{-x}(-\sin x)\,dx\right)\\
&=-e^{-x}\sin x+\left(-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx\right)
\end{aligned}$$

自信ないよ

ここで，$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=A$ とおくと，

初めてみるやり方やな

$$\begin{aligned}
A&=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-A\\
2A&=-e^{-x}(\sin x+\cos x)\\
A&=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)
\end{aligned}$$

これはこれで興味深い

$$\therefore\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

■

この問題には次のような面白い別解（裏ワザ）があるので紹介します．

解　まずは，$e^{-x}\sin x$ と $e^{-x}\cos x$ をそれぞれ微分して，

$$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\quad\cdots①$$
$$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\quad\cdots②$$

①＋② より，

$$\begin{aligned}
(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)'&=-2e^{-x}\sin x\\
\left\{-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right\}'&=e^{-x}\sin x
\end{aligned}$$

$$\therefore\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

オー，スゲー　もう出たで

ちなみに，①－② を考えると，

$$\begin{aligned}
(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)'&=2e^{-x}\cos x\\
\left\{\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\right\}'&=e^{-x}\cos x
\end{aligned}$$

$$\therefore\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

注　この裏ワザのすごいところは，$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ と $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ が同時に求められるということです．それぞれを別々に部分積分から求めるのはとても時間がかかるので，テスト本番でもどんどん使ってかまいません．

はーい

2　続・部分分数に分ける

分母が複数の関数の積になっている分数関数を積分する場合，**部分分数に分解する**という手法がよく用いられるということは，以前にも紹介しました．

そのときは，テキトーにわけて何とかなりましたが，そうも言っていられない場合があります．

例題 2.

(1)　$\dfrac{3x+2}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$
なる定数 a，b，c を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}\,dx$ を計算せよ．

考え方　この問題の (1) は部分分数の分け方を教えてくれています．丁寧ですねえ．とりあえず指示に従ってやってみましょう．

うん

解 $\dfrac{3x+2}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$ の両辺に $x(x+1)^2$ をかけて

$$3x+2=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$$
$$3x+2=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$$

x についての恒等式とみて係数を比較すると，

$a+b=0$, $2a+b+c=3$, $a=2$

よって，$a=2$，$b=-2$，$c=1$.

$$\therefore\ \frac{3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=2\log|x|-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$$
$$=2\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

なんとか積分できたけど(1)がなかったらどーすんの？

できへんわ

■

なぜこのように分解できるのか，という疑問は残りますが，何とかできました．この勢いで他の問題をやろうと思うと，ハタと手が止まります．どういうふうに部分分数に分けるのかわからない！

例 題 3.

(1) $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ (2) $\dfrac{1}{x^2(x+2)}$

(3) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ (4) $\dfrac{x^2+1}{x^4-5x^2+4}$

(5) $\dfrac{3x+2}{x(x+1)^3}$

考え方 いずれも次のように部分分数分解できます．分母の形に注目して分解の方法をイメージしてください．

(1) 分母が（1次式）×（1次式）×（1次式）

これは何となくわかる

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}}$$

(2) 分母が（1次式）^{2}×（1次式）の場合

なんで～

$$\boxed{\frac{1}{x^2(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+2}}$$

(3) 分母が（1次式）×（2次式）の場合

なんで～

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}}$$

(4) 分母を因数分解すると

$$(\text{分母})=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

なので，一般的に分母が4つの1次式の積の場合

何となくわかる

$$\boxed{(\text{与式})=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{x-2}}$$

のように分解するしかないのですが，今回の場合，$x^2=t$ とおけば，

$$\frac{x^2+1}{x^4-5x^2+4}=\frac{t+1}{t^2-5t+4}=\frac{t+1}{(t-1)(t-4)}$$

となり，分母を（1次式）×（1次式）とみなすことができます．よって，

$$\frac{t+1}{(t-1)(t-4)}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t-4}$$

と考えます．つまり

$$\boxed{\frac{x^2+1}{x^4-5x^2+4}=\frac{a}{x^2-1}+\frac{b}{x^2-4}}$$

なんで～

として，まずは a, b を決定した後で，$\dfrac{a}{x^2-1}$ や $\dfrac{b}{x^2-4}$ をもう一度それぞれ部分分数に展開すればよいのです．このほうが計算が圧倒的に楽になります．

(5) 分母が（1次式）×（1次式）^{3} の場合

$$\boxed{\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(x+1)^3}}$$

意味不明

よって，先ほどと同様に分母をはらって，両辺を x の恒等式とみて係数比較すれば a, b, c などが決定し，部分分数分解が完成します．あとは，通常の不定積分なので解答は省略します．

注 上の **考え方** を見て，「なんで，こんな風に分けるねん？？」って思った人が多いと思います．確かに不思議な分解方法です．なんとなく分け方の雰囲気はわかりますが，なぜこのように分解できるのでしょうか．

それには，とても深い理由があるのです．「多項式版の整数問題」とでも言いましょうか，ちょっと難しい．知りたい人は個人的に聞きに来てください．なお，入試では必ず分解の仕方の誘導があるので安心してください．

よかった～安心した

例 題 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_3}{x^3}+\dfrac{a_4}{1-x}$ とおいて，定数 a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を計算せよ．

（2000年神戸大後期理系）

これはできるぞ

神大合格

こんな問題が，天下の神戸大学で出題されました．ちゃんと誘導がありますね．本番ではこんな感じです．