

数列の極限

この前の犬プリ『無限大の話』で

$\frac{\infty}{\infty}$ と $\infty - \infty$ はマジでヤバイ！ $\infty \times 0$ もヤバイ！



そーや、た
そーや、た
ヤバイヤッヤ

という話をしました。今回はこのヤバイ極限值計算に果敢に挑んでいきましょう。代表的な極限值計算を紹介합니다。いずれもとても重要です。

1 $\infty - \infty$ タイプ

▷Point◁

最高次でくくり出す。

とにかく、計算できる形(無条件に認めてよい形)に近付けることがポイント。



【例題】1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 100n^2)$

【考え方】典型的な $\infty - \infty$ タイプ。3次式なので n^3 でくくり出します。

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 100n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(1 - \frac{100}{n}\right)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{100}{n}\right) = 1$ なので、求める極限値は ∞ 。

【注】上の解答では最高次の n^3 でくくり出しましたが、 n^2 でくくり出してもうまくなります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 100n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(n - 100) = \infty$$

しかし、 n でくくり出すとうまいきません。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 100n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n^2 - 100n) ???$$

$\infty - \infty$ というヤバイ形が解消されていないからです。 失敗～

「最高次でくくりだす」というマニュアルを単純に暗記するのではなく、とにかく何かでくくり出してみてもダメなら修正する、悩むよりもとりあえずやってみる、という姿勢が重要かと思います。いろいろ試行錯誤を重ねて自分で感じて欲しいですね。数学は暗記ではないのです。

2 $\frac{\infty}{\infty}$ タイプ

▷Point◁

分母分子を分母の最高次で割る。

とにかく、計算できる形(無条件に認めてよい形)に近付けることがポイント。



ふ～ん

【例題】2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1}$

【考え方】典型的な $\frac{\infty}{\infty}$ タイプ。分母が2次式なので分母分子を n^2 で割ります。

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ なので、求める極限値は、 $\frac{1+0-0}{2+0} = \frac{1}{2}$ 。 7ム7ム

【注】この解答のポイントは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ を利用して、分母分子が共に定数に収束できたことにあります。

【注】上の解答では分母の最高次の n^2 で分母分子を割りましたが、他のもので割ったらどうなるでしょうか。例えば分母分子を n で割ってみると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1 - \frac{1}{n}}{2n + \frac{1}{n}}$$

ん?
 うまくいった?

$\lim_{n \rightarrow \infty}(\text{分子}) = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty}(\text{分母}) = \infty$ なので、 $\frac{\infty}{\infty}$ の形になってしまい意味がありません。同様に n^3 で割ると、 $\frac{0}{0}$ となって、またまたおかしなことに。つ

まり、この問題では、分母分子を n^2 で割る以外に方法はなさそうです。

例題 3. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n - 3}$

考え方 (1) の場合、 n で割っても、 n^2 で割ってもうまくいきます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

(2) の場合は、 n で割るとうまくいきますが、 n^2 で割るとうまくいきません。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{0} ???$$

お気楽に
とにか
イロイ
やってみ
ことだネ

「分母分子を分母の最高次で割る」というマニュアルを単純に暗記するのではなく、とにかく何かで割ってみてダメなら修正する、悩むよりもとりあえずやってみる、という姿勢が重要かと思います。いろいろと試行錯誤を重ねて自分で感じて欲しいですね。数学は暗記ではないのです。

いずれにしても次のことがポイントです。

▷Point◁

とにかく、 $\frac{(\text{定数})}{\infty}$ の形を作る。
無条件に収束するのは $\frac{(\text{定数})}{\infty} \rightarrow 0$ の場合のみだから。

参考 実は次のような法則があります。

▷Point◁

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k \text{ 次式})}{(l \text{ 次式})}$ タイプの極限は、分母の最高次すなわち n^l で割るとうまくいく。さらに、
 $k = l$ のとき、 $\frac{k \text{ 次の係数}}{l \text{ 次の係数}}$ に収束
 $k > l$ のとき、 $+\infty$ または $-\infty$ に発散
 $k < l$ のとき、 0 に収束
となることがわかる。

3 $\sqrt{\quad}$ がらみ

“ルート”とくれぽ
有理化だ (??)

$\sqrt{\quad}$ を含んだ式の極限を求める場合、どうい
うわけだか有理化(みたいなこと)すると上手くいく
場合が多いのです。 条件反射
めたい...

例題 4. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 3n} - n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n)$

考え方 (1) は分母の有理化。(2) は、
 $\sqrt{n^2 - 2n} - n = \frac{\sqrt{n^2 - 2n} - n}{1}$ と解釈して、分
子の有理化を行います。

解

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{(n^2 + 3n) - n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

∞ タイプのはで
分母分子を何かで
割ります。
今回は n で割りました。
♡ 7ム7ム

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n} - n)(\sqrt{n^2 - 2n} + n)}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + 1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

やっぱり
分母分子を
 n で割りました。

うまいこと
7ム7ム
たのしー

注 (2) について、次のような間違いが非常に多いのです。

絶対にやってはいけないミス

やっちゃダメ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 - \frac{2}{n}} - 1 \right) \leftarrow \infty \times 0 \text{ タイプ}$$

$$= 0 \leftarrow \text{ダメ! 大ウソ!}$$

n でくり出すと、 $\infty \times 0$ という形になってしまいます。「 $\infty \times 0$ はヤバイ」というのはこれまで何度も言ってるのに、ついつい「 $\infty \times 0 = 0$ 」とカンチガイしてしまうんですね。本当に多いミスなので注意しましょう。絶対にやっちゃダメだよ。

やばい?



注 $\sqrt{\quad}$ を含んだ式なら何でもかんでも有理化すれば良い、というわけではありません。有理化せざるを得ないから有理化するのであって、有理化しなくて済むなら、わざわざ有理化なんてメンドウなことはしません。では、次の ①~⑤ の中で、有理化せざるを得ないのはどれでしょうか。また、その理由は?

① $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n}$

全部、有理化 (7-1) のやつけど...

どね?

▷Point◁

ヤバイ形があるから、ヤバイ形を解消するために有理化するのである。ヤバイ形がないのならば、有理化する必要はない。

カレホド ヲーケーことか

解 有理化せざるを得ないのは、②、④。いずれも $\infty - \infty$ を含んでいるから。

それ以外は、有理化しなくても答えが出せる。

① は $\infty + \infty$ なので ∞ 。③ は $\frac{1}{\infty}$ なので 0。

⑤ は $\frac{\infty}{\infty}$ なので分母分子を n で割る。極限值 $\frac{1}{2}$

■

参考 (2) で「 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n) = -1$ になるのは計算しなくても明らかだ」と言えば驚きますか? 「いや、驚かないよ、アタリマエやろ」と思え

る人は無限に関する感覚に優れた人でしょう。次のように考えます。

まずは $n^2 - 2n = (n-1)^2 - 1$ と変形する。
 $n \rightarrow \infty$ ということは n がめちゃくちゃデッカイってことだから、 $(n-1)^2 - 1$ に付いている “-1” なんて、ほこりのようなもの。 n の大きさに比べれば無視できるほど小さいので、 $(n-1)^2 - 1$ と $(n-1)^2$ はほとんど同じとみなせる。つまり、 $(n-1)^2 - 1 \doteq (n-1)^2$ 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n-1)^2 - 1} - n \}$$

$$\doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n-1)^2} - n \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (n-1) - n \}$$

$$= -1$$

うまいことなってる

これらの解答をテストで用いるのはちょっとダメですが、この感覚はとても重要で、今後役に立つことがあると思います。

例題 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

考え方 分母と分子がそれぞれ $\infty - \infty$ タイプなので、それぞれを有理化する必要があります。

解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3})}$$

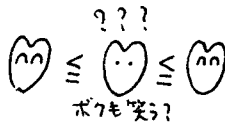
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right)} = \frac{2(1+1)}{1+1} = 2$$

分母分子を \sqrt{n} で割りました。

ちょっとメンドクさいけど やってることは単純です

あー しんどかったー

4 ハサミウチの原理



数列の極限値を計算するとき、これまでに紹介したどの方法でも無理な場合は、次の手法を使います。

▷Point◁

ハサミウチの原理

すべての n について、 $a_n \leq c_n \leq b_n$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

が成立する。

このことは「両端が同じ値に収束すれば、真ん中も同じ値に収束する」ことを意味しています。まさに「ハサミウチの原理」です。実にナイスなネーミング!

次のようにイメージすると良いでしょう。

赤阪くんは寄り道大好き。今日も学校帰りに寄り道するつもりです。

赤阪くん「帰りに寄り道するぞ～。ミスドに寄ろうかな～スタバに寄ろうかなあ～。いやいや、近商ストアもいいねえ～、ど～しよ～かなあ～迷うなあ～」

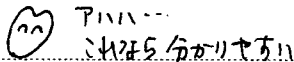
なんて言っていると、赤阪くんの両脇をガッチリと2人の人が捕まえました。

2人の人「このまま学園前駅に直行する！」

赤阪くん「エ～っ。うそや～ん。」

こうなれば、赤阪くんも寄り道せず学園前駅に行かざるを得ません。

「ハサミウチの原理」とは、こんなイメージです。



それでは早速、ハサミウチの原理を使ってみよう。

例題 6. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

考え方 いずれもは難しそうな形をしています。が、「ハサミウチの原理」を利用するとアッサリ解決します。

解 (1) $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{4} \leq 1$ より、
 $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} \leq \frac{1}{n}$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ であるので、ハサミウチの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} = 0$

(2) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ より、

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ であるので、ハサミウチの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$



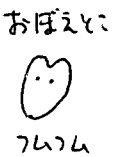
注 $\frac{(\text{定数})}{\infty} \rightarrow 0$ であることはこれまでも登場していますが、分子が定数で固定していても、ある範囲内の数(つまり、その範囲内からはみ出さない数)ならば大丈夫なのです。つまり、

$$\frac{(\text{有限確定})}{\infty} \rightarrow 0$$

が成立します。つまり、上の2つの例では、分子部分が-1以上1以下という有限の範囲内に確定していることが重要なのです。ある範囲内にあれば(たとえ、-1億以上1億以下であろうが、-1兆以上1兆以下であろうが)、そんなものすら吹っ飛ばしてしまうくらい ∞ は強烈に大きいのです。

注 この先「ハサミウチの原理」は非常に強力な役割を果たします。そのうち、否が応でも「ハサミウチの原理」のありがたみを実感するはずですよ。

極限値が求めにくい場合は「ハサミウチの原理」を利用するというのは入試数学の常識です。特に、何かしらの不等式の証明をした後で、極限値を求める問題が続く場合は100%「ハサミウチの原理」を使うと思って間違いないでしょう。



最後に、数列の極限の求め方をまとめておこう。

▷Point◁(まとめ)

数列の極限の求め方(重要)

$\infty - \infty$ 型 \rightarrow 最高次でくり出す

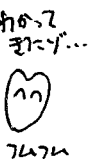
$\frac{\infty}{\infty}$ 型 \rightarrow 分母分子を

分母の最高次で割る

$\sqrt{\quad}$ がらみ \rightarrow 必要に応じて有理化

(いつも有理化するわけではない)

それでも無理なら「ハサミウチの原理」



なお、いつも必ずこのマニュアル通りにできるとは限らないので、臨機応変に対応してください。

