数列の極限

この前の犬プリ『無限大の話』で

$\dfrac{\infty}{\infty}$ と $\infty-\infty$ はマジでヤバイ！　$\infty\times 0$ もヤバイ！


そーやった
そーやった
ヤバイやつや

という話をしました．今回はこのヤバイ極限値計算に果敢に挑んでいきましょう．代表的な極限値計算を紹介します．いずれもとても重要です．

1　$\infty-\infty$ タイプ

▷Point◁

最高次でくくり出す．

とにかく，計算できる形（無条件に認めてよい形）に近付けることがポイント．


ふ〜ん

例題 1.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-100n^2)$

考え方　典型的な $\infty-\infty$ タイプ．3 次式なので n^3 でくくり出します．

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-100n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{100}{n}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{100}{n}\right)=1$ なので，求める極限値は ∞．

■

注　上の解答では最高次の n^3 でくくり出しましたが，n^2 でくくり出してもうまくいきます．

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-100n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2(n-100)=\infty$$

しかし，n でくくり出すとうまくいきません．

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-100n^2)=\lim_{n\to\infty}n(n^2-100n)\ \ ???$$

$\infty-\infty$ というヤバイ形が解消されていないからです．


失敗〜

「最高次でくくりだす」というマニュアルを単純に暗記するのではなく，とにかく何かでくくり出してみてダメなら修正する，悩むよりもとりあえずやってみる，という姿勢が重要かと思います．いろいろ試行錯誤を重ねて自分で感じて欲しいですね．数学は暗記ではないのです．

2　$\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプ

▷Point◁

分母分子を分母の最高次で割る．

とにかく，計算できる形（無条件に認めてよい形）に近付けることがポイント．


ふ〜ん

例題 2.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}$

考え方　典型的な $\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプ．分母が 2 次式なので分母分子を n^2 で割ります．

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ なので，求める極限値は，$\dfrac{1+0-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$．


フムフム

■

注　この解答のポイントは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ を利用して，分母分子が共に定数に収束できたことにあります．

注　上の解答では分母の最高次の n^2 で分母分子を割りましたが，他のもので割ったらどうなるでしょうか．例えば分母分子を n で割ってみると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\frac{1}{n}}{2n+\frac{1}{n}}$$

ん？

うまくいった？

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\text{分子})=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\text{分母})=\infty$ なので，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になってしまい意味がありません．同様に n^3 で割ると，$\dfrac{0}{0}$ となって，またまたおかしなことに．つ

まり，この問題では，分母分子を n^2 で割る以外に方法はなさそうです．

例題 3. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}$

考え方 (1) の場合，n で割っても，n^2 で割ってもうまくいきます．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+\frac{1}{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

(2) の場合は，n で割るとうまくいきますが，n^2 で割るとうまくいきません．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{0}\ \ ???$$

お気楽に

「分母分子を分母の最高次で割る」というマニュアルを単純に暗記するのではなく，とにかく何かで割ってみてダメなら修正する，悩むよりもとりあえずやってみる，という姿勢が重要かと思います．いろいろと試行錯誤を重ねて自分で感じて欲しいですね．数学は暗記ではないのです．

とにかくイロイロやってみることだネ

いずれにしても次のことがポイントです．

▷Point◁

とにかく，$\dfrac{(\text{定数})}{\infty}$ の形を作る．
無条件に収束するのは $\dfrac{(\text{定数})}{\infty}\longrightarrow 0$ の場合のみだから．

参考 実は次のような法則があります．

▷Point◁

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(k\text{ 次式})}{(l\text{ 次式})}$ タイプの極限は，分母の最高次すなわち n^l で割るとうまくいく．さらに，
$k=l$ のとき，$\dfrac{k\text{ 次の係数}}{l\text{ 次の係数}}$ に収束
$k>l$ のとき，$+\infty$ または $-\infty$ に発散
$k<l$ のとき，0 に収束
となることがわかる．

3 $\sqrt{}$ がらみ

"ルード"とくれば有理化だ

$\sqrt{}$ を含んだ式の極限を求める場合，どういうわけだか**有理化（みたいなこと）すると上手くいく場合が多い**のです．

条件反射みたい…

例題 4. 次の極限を求めよ．
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}$
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)$

考え方 (1) は分母の有理化．(2) は，$\sqrt{n^2-2n}-n=\dfrac{\sqrt{n^2-2n}-n}{1}$ と解釈して，分子の有理化を行います．

解

(1)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(n^2+3n)-n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)\\
&=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプなので分母分子を何かで割ります。今回は n で割りました。

フムフム

(2)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2n}-n)(\sqrt{n^2-2n}+n)}{\sqrt{n^2-2n}+n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-2n)-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}\\
&=-1
\end{aligned}$$

やっぱり分母分子を n で割りました。

■

うまいことなってるね

たのしー

注 (2) について，次のような間違いが非常に多いのです.

絶対にやってはいけないミス

やっちゃダメー

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}}-1\right) \longleftarrow \infty\times 0\text{タイプ}$$
$$=0 \longleftarrow \text{ダメ！　大ウソ！}$$

n でくくり出すと，$\infty\times 0$ という形になってしまいます.「$\infty\times 0$ はヤバイ」というのはこれまで何度も言ってるのに，ついつい「$\infty\times 0=0$」とカンチガイしてしまうんですね. 本当に多いミスなので注意しましょう. 絶対にやっちゃダメだよ.

そうなん？

注 $\sqrt{}$ を含んだ式なら何でもかんでも有理化すれば良い，というわけではありません. 有理化せざるを得ないから有理化するのであって. 有理化しなくて済むなら，わざわざ有理化なんてメンドウなことはしません. では，次の ①～ ⑤ の中で，有理化せざるを得ないのはどれでしょうか. また，その理由は？

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

全部，有理化したくなるけど…　どれ～？

▷Point◁

ヤバイ形があるから，ヤバイ形を解消するために有理化するのである. ヤバイ形がないのならば，有理化する必要はない.

ナルホド　そーゆーことか

解 有理化せざるを得ないのは，②，④. いずれも $\infty-\infty$ を含んでいるから.

それ以外は，有理化しなくても答えが出せる.

① は $\infty+\infty$ なので ∞. ③ は $\dfrac{1}{\infty}$ なので 0。

⑤ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ なので分母分子を n で割る. 極限値 $\dfrac{1}{2}$

■

参考 (2) で「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)=-1$ になるのは計算しなくても明らかだ」と言えば驚きますか?「いや，驚かないよ，アタリマエやろ」と思える人は無限に関する感覚に優れた人でしょう. 次のように考えます.

まずは $n^2-2n=(n-1)^2-1$ と変形する. $n\longrightarrow\infty$ ということは n がメチャクチャデッカイってことやから，$(n-1)^2-1$ に付いている "-1" なんて，ほこりのようなもの. n の大きさに比べれば無視できるほど小さいので，$(n-1)^2-1$ と $(n-1)^2$ はほとんど同じとみなせる. つまり，$(n-1)^2-1\fallingdotseq(n-1)^2$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)\\&=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)^2-1}-n\}\\&\fallingdotseq\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)^2}-n\}\\&=\lim_{n\to\infty}\{(n-1)-n\}\\&=-1\end{aligned}$$

うまいことなってるなー

これらの解答をテストで用いるのはちょっとダメですが，この感覚はとても重要で，今後役に立つことがあると思います.

例題 5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

考え方 分母と分子がそれぞれ $\infty-\infty$ タイプなので，それぞれを有理化する必要があります.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}=\frac{2(1+1)}{1+1}=2\end{aligned}$$

分母分子を $\sqrt{n}$ で割りました。

■

ちょっとメンドクサイけど　やってることは単純です

あー　しんどかった一

4　ハサミウチの原理

???
ボクも笑う？

数列の極限値を計算するとき，これまでに紹介したどの方法でも無理な場合は，次の手法を使います．

▷Point◁

ハサミウチの原理

すべての n について，$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成立する．

このことは「両端が同じ値に収束すれば，真ん中も同じ値に収束する」ことを意味しています．まさに「ハサミウチの原理」です．実にナイスなネーミング！

次のようにイメージすると良いでしょう．

赤阪クンは寄り道大好き．今日も学校帰りに寄り道するつもりです．
赤阪クン「帰りに寄り道するぞ～．ミスドに寄ろうかな～スタバに寄ろうかなあ～．いやいや，近商ストアもいいねえ～，ど～しよ～かなあ～迷うなあ～」
なんて言っていると，赤阪クンの両脇をガッチリと 2 人の人が捕まえました．
2 人の人「このまま学園前駅に直行する！」
赤阪クン「エ～ッ．うそや～ん．」
こうなれば，赤阪クンも寄り道せず学園前駅に行かざるを得ません．
「ハサミウチの原理」とは，こんなイメージです．

アハハ…
これなら分かりやすい

それでは早速，ハサミウチの原理を使ってみよう．

例題 6.　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

考え方　いずれもは難しそうな形をしていますが，「ハサミウチの原理」を利用するとアッサリ解決します．

解　(1) $-1 \leqq \cos\dfrac{n\pi}{4} \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} \leqq \frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ であるので，ハサミウチの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2) $-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{(-1)^n}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ であるので，ハサミウチの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

メッチャ
かんたーん

■

注　$\dfrac{(\text{定数})}{\infty} \longrightarrow 0$ であることはこれまでにも登場していますが，分子が定数で固定していなくても，ある範囲内の数 (つまり，その範囲内からはみ出さない数) ならば大丈夫なのです．つまり，

$$\frac{(\text{有限確定})}{\infty} \longrightarrow 0$$

が成立します．つまり，上の 2 つの例では，分子部分が -1 以上 1 以下という有限の範囲内に確定していることが重要なのです．ある範囲内にあれば (たとえ，-1 億以上 1 億以下であろうが，-1 兆以上 1 兆以下であろうが)，そんなものすら吹っ飛ばしてしまうくらい ∞ は強烈に大きいのです．

注　この先「ハサミウチの原理」は非常に強力な役割を果たします．そのうち，否が応でも「ハサミウチの原理」のありがたみを実感するはずです．

極限値が求めにくい場合は「ハサミウチの原理」を利用するというのは入試数学の常識です．特に，何かしらの不等式の証明をした後で，極限値を求める問題が続く場合は 100 %「ハサミウチの原理」を使うと思って間違いないでしょう．

おぼえとこ
フムフム

最後に，数列の極限の求め方をまとめておこう．

▷Point◁(まとめ)

数列の極限の求め方 (重要)

$\infty - \infty$ 型 $\longrightarrow$ 最高次でくくり出す

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型 $\longrightarrow$ 分母分子を分母の最高次で割る

$\sqrt{\quad}$ がらみ $\longrightarrow$ 必要に応じて有理化 (いつも有理化するわけではない)

それでも無理なら「ハサミウチの原理」

わかってきたゾ…
フムフム

なお，いつも必ずこのマニュアル通りにできるとは限らないので，臨機応変に対応してください．

はーい