どこに向かおうとしてるの？

風の向くまま
気の向くままさ….

数列 $\{a_n\}$ を考えます．

$$\{a_n\} : a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\cdots\cdots \longrightarrow \boxed{\ ?\ }$$

このままどんどん続いていくと，数列の各項はどのようになっていくでしょうか．言いかえれば，n をどんどん大きくしていくと一般項 a_n はどのようになっていくでしょうか．そんなんやってみないと分かりませんね．大切なことは，具体例によるイメージです．とにかく具体的に考えてみよう．

注 有限個の項からなる数列を有限数列といいます．数学 B では，有限数列の一般項や，初項から第 n 項までの和を求める問題を学習しました．これに対して，項が限りなく続く数列を無限数列といいます．以下では，特に断りのない限り，数列といえば，無限数列を意味するものとします．そう，無限の世界を探っていくのが数学 Ⅲ の目的です．

例題 1.　一般項が次のように表される数列の各項は，n が大きくなるにつれて，どうなっていくでしょうか？日本語で説明しよう．

(1) $\sqrt{2n+1}$　(2) $2-3n$　(3) $\dfrac{1}{n}$　(4) $\dfrac{n+1}{n}$　(5) $\cos n\pi$　(6) $\dfrac{n^2}{(-1)^n}$　(7) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

いろいろあるなー

すぐには分からんね

考え方 このような問題は「数列の極限を調べよ」と言われることがあります．あんまり深刻に考えず，とにかく具体的に書き出して，感覚的に答えることが大切です．

解

(1) $\sqrt{3},\quad \sqrt{5},\quad \sqrt{7},\quad \sqrt{9},\quad \sqrt{11},\quad \sqrt{13},\quad \sqrt{15},\quad \sqrt{17},\quad \sqrt{19},\quad \sqrt{21},\quad \cdots\cdots$　どんどん大きくなりそう

$\longrightarrow$ どんどん，ひたすら，いくらでも大きくなっていく．

(2) $-1,\quad -4,\quad -7,\quad -10,\quad -13,\quad -17,\quad -20,\quad -23,\quad -26,\quad \cdots\cdots$　逆に今度は小さくなりそう

$\longrightarrow$ どんどん，ひたすら，いくらでも小さくなっていく．

(3) $\dfrac{1}{1},\quad \dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{3},\quad \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{5},\quad \dfrac{1}{6},\quad \dfrac{1}{7},\quad \cdots\cdots$　う〜ん 小さくなってるけど．さっきとちがうゾ

$\longrightarrow$ どんどん小さくなっているが，いくらでも小さくなるわけではない．だんだん 0 に近づいていく．

注 0 に近づくのがイメージしにくい人は，思いっきり n を大きくしてみよう．$\dfrac{1}{10000}$ とか，$\dfrac{1}{10000000}$ とか．ほとんど 0 でしょう．

(4) $\dfrac{2}{1},\quad \dfrac{3}{2},\quad \dfrac{4}{3},\quad \dfrac{5}{4},\quad \dfrac{6}{5},\quad \dfrac{7}{6},\quad \cdots\cdots$　う〜ん これだけだとイメージできん

$\longrightarrow$ 分母と分子の数字がだんだん一致していっている．つまり 1 に近づいていく．

注 1 に近づくのがイメージしにくい人は，思いっきり n を大きくしてみよう．$\dfrac{10001}{10000}$ とか，$\dfrac{10000001}{10000000}$ とか．ほとんど 1 でしょう．

(5) $-1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\quad \cdots\cdots$　アハハ 行ったり来たり．変なのー

$\longrightarrow$ $+1$ と -1 が交互に続く．大きくなったり小さくなったり，特定の値になるわけでもない．

(6) $-1,\quad 4,\quad -9,\quad 16,\quad -25,\quad 36,\quad \cdots\cdots$　ムムム なにこれ？

$\longrightarrow$ 正と負が入れ代わりながら，ものすごく大きくなったり，ものすごく小さくなったりしていく．特定の値になるわけでもない．

(7) $-\dfrac{1}{3},\quad \dfrac{1}{9},\quad -\dfrac{1}{27},\quad \dfrac{1}{81},\quad -\dfrac{1}{243},\quad \dfrac{1}{729},\quad \cdots\cdots$　うん？ さっきと同じ？ ちがう？

$\longrightarrow$ 正と負が入れ代わりつつも，どんどん 0 に近づいていく．(5) や (6) とは明らかに違う．

これらの例からもわかるように，無限数列の項の行き先には，いろいろな場合があるようですが，いくつかのパターンに分類できそうです．順番に考えていこう．

はーい

1　収束する数列

先ほどの例で，行き着く先が「一定の値」になっているものがあるでしょう．その場合を次のように定義します．

▷Point◁(定義)

> 数列 $\{a_n\}$ と定数 α に対して，n を大きくするにつれて，a_n の値が α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，α は数列 $\{a_n\}$ の極限値であるという．
> $\{a_n\}$ は α に収束することを記号では
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$
>
> または
>
> $$a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \longrightarrow \infty)$$
>
> と書く．

∞ という記号は「無限大」と読みます．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の日本語での習慣的な読み方は

「リミット，エヌ無限大，エイエヌ」

です．

参考 ちなみに英語読みすれば

”*limit of* a_n *as* n *tends to infty*”

こっちの方がかっこいい？

$n \longrightarrow \infty$ は n が限りなく大きくなっていくという「状態」を表しています．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは，あくまでも数列 $\{a_n\}$ が α に近づいていくという「目標」を表しており，必ずしも a_n が α になるという意味ではありません．

あくまでも“近づいている”ということ

フーン

「n を大きくすると，a_n の値が α に限りなく近づく」という表現は，何となく曖昧さが残りますが，まあ高校段階では仕方ありません．すべての教科書がこうなっています．かなり直感的，感覚的な表現ですね．

まあエエやん

注　数列 $\{a_n\}$ が一定の値である場合（例えば，1，1，1，1，…）も収束する数列と考えます．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c \text{ は定数})$$

です．

したがって，先ほどの例では，(3)，(4)，(7) が収束する場合です．つまり，

(3)	$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	∴　0 に収束
(4)	$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$	∴　1 に収束
(7)	$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$	∴　0 に収束

となります．

注　(4) は $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ と解釈すると，(3) の結果が使えて，$\dfrac{n+1}{n}$ が 1 に収束することがわかります．

これは分かりやすい!!

2　発散する数列

数列が収束しないとき，その数列は「発散する」あるいは「極限値をもたない」といいます．

発散する数列には，いくつかのタイプがあります．

2.1　∞ または $-\infty$ に発散する

▷Point◁(定義)

> 数列 $\{a_n\}$ に対して，n を大きくするにつれて，a_n の値が限りなく大きくなるならば，
>
> 数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$（正の無限大）に**発散する**
>
> といい，記号では，
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
>
> または
>
> $$a_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow \infty)$$
>
> と書く．

注　$+\infty$ と ∞ は全く同じ意味です．どっちかに統一したほうが良いのですが，状況に応じて適当

に使い分けます．

➾注　「n を大きくすると，a_n の値が限りなく大きくなる」という表現も，何となく曖昧さが残りますが，まあ高校段階では仕方ありません．すべての教科書がこうなっています．かなり直感的，感覚的な表現ですね．

先ほどの例では，(1) の場合です．つまり，

> (1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}=\infty$　　$\therefore$　$+\infty$ に発散

となります．　フムフム

$-\infty$(負の無限大) に発散する場合も同様ですが，いちおう定義しておこう．

▷Point◁(定義)

> 数列 $\{a_n\}$ に対して，n を大きくするにつれて，a_n の値が限りなく小さくなるならば，
>
> 数列 $\{a_n\}$ は $-\infty$ (負の無限大) に**発散**する
>
> といい，記号では，
>
> $$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$$
>
> または
>
> $$a_n\longrightarrow-\infty\quad(n\longrightarrow\infty)$$
>
> と書く．

➾注　厳密には「数列 $\{-a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとき，数列 $\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散する」と定義しますが，こっちの方が分かりやすいでしょう．

先ほどの例では，(3) の場合です．つまり，

> (3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2-3n)=-\infty$　　$\therefore$　$-\infty$ に発散

となります．

➾注　「a_n の値が限りなく大きくなる」と「数列 $\{a_n\}$ がいつまでも増加を続ける」は全く違う意味です．数列 $\{a_n\}$ がいつまでも増加を続けるからといって，$+\infty$ に発散するとは限りません．例えば，円周率の小数点以下を順に増やして並べた数列

$a_1=3$
$a_2=3.1$
$a_3=3.14$
$a_4=3.141$
$a_5=3.1415$
$a_6=3.14159$
$a_7=3.141592$
……

どんどん
大きくなっていくけど‥‥

はいつまでも増加を続けますが，発散せずに π に収束します．しかも，不思議なことに，この数列の各項は有理数なのに収束先は無理数 π というなんだか良く分からない状況にもなっています．いずれにしても無限を考えることには，人間の想像を超えた不思議な現象が多々起こりうるのです．

まだまだ
知らない世界が
あるのネ…
ふ〜ん

2.2　振動する

収束せず，しかも，∞ にも $-\infty$ にも発散しない場合を，「**振動する**」といいます．

先ほどの例では，(5)，(6) の場合です．つまり，

> (5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos n\pi$　　　振動する
>
> (6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(-1)^n}$　　　振動する

となります．

➾注　くれぐれも，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos n\pi=\pm1$ とか，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(-1)^n}=\pm\infty$ と書いてはいけません．気持ちはわかりますが，あくまでも「振動する」と文章表記します．

書いちゃ
ダメ〜

3　まとめ

したがって，以上をまとめると，数列の極限は次のように分類できます (この分類はとても重要).

▷Point◁(数列の極限の分類)

$$\begin{cases} \text{収束する} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ (\text{極限値は}\ \alpha) \\ \text{発散する} & \begin{cases} +\infty\ \text{に発散する} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (\text{極限は正の無限大}) \\ -\infty\ \text{に発散する} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\ (\text{極限は負の無限大}) \\ \text{振動する} & \text{その他の場合全部}\ (\text{極限はない}) \end{cases} \end{cases}$$


具体例とともにしっかり区別して整理しよう。

注 ∞ は特定の値ではないので「極限値は正の無限大」とは言いません（正確には「極限は正の無限大」）.「∞ に収束する」という言い回しもまったくナンセンスです. $-\infty$ の場合も同様です.

注 「振動する」ということが少し分かりにくいかもしれません.「振動」という言葉からも，なんだかフラフラ揺れ動いているイメージがありますが，そうではありません. 上の分類からも分かるように，収束する場合，∞ にも $-\infty$ にも発散する場合以外を全て「振動する」というのです. ですから，次のような群数列

変なヤツはみんな振動や

ああしんど

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

なども「振動する」のです.

例題 2. 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を，それぞれ 1 つずつあげよ.

(1) すべての n について $a_n > 5$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 5$

(2) 各項が互いに異なり，$\{a_n\}$ は収束しないが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = 1$

考え方 このような問題は数列の極限のイメージがきちんとできているか把握する意味でとても重要です.

解 (1) $a_n = 5 + \dfrac{1}{n}$

(2) $a_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

注 他にもないか考えてみよう.

4 大学で学ぶこと

極限や極限値については，このように直感的，感覚的な理解で程度十分なのですが，何度も言っているように「近づく」とか「限りなく」といった表現にはどうしても曖昧さが残ってしまいます.

高校数学では「あんまり細かいこと言わんと，感覚的にわかるやろ～」とスルーしてしまうのがフツーです. 大学では，この曖昧さを厳密に論じるために，次のような論述方法を導入して解決します.

ちょっと先取りして紹介しましょう. 数学的に厳密な数列の極限の定義は次のようになります.

収束することの厳密な定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，与えられた任意の正数 ε に対して，

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

をみたすような自然数 N が存在することである.

そもそも日本語の意味が分かりませーん

ムリっ

発散することの厳密な定義

数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとは，与えられた任意の正数 M に対して，

$$n > N \implies a_n > M$$

をみたすような自然数 N が存在することである.

そもそも日本語の意味が分かりません

もうねます

この定義を読んで，「なるほど、これなら曖昧さがなくて完璧だ」「さっきの表現よりもわかりやすい」と感じる人は，素晴らしく数学的センスにあふれた人なので，ぜひとも理学部数学科に進学してください. 理学部数学科に限らず，理系大学の 1 年生の講義で必ず習うはずですが，けっこう難しいので，最近は，大学でもあんまりやらないという話も聞きます（さすがに理学部数学科では必ずやるでしょうが）. この論法の理解に四苦八苦して，ドロ沼にはまっていく人が多いんだよなあ.

「考える」のではなく「感じる」んだよね.


しみじみ…