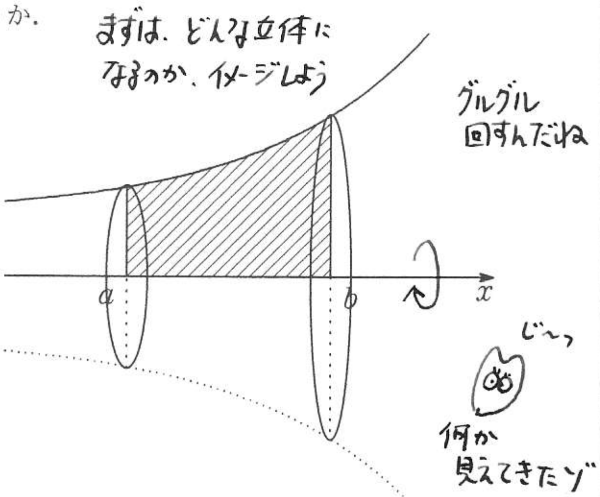
# 体積のキソ

体積を求めることこそ、積分の醍醐味です!!

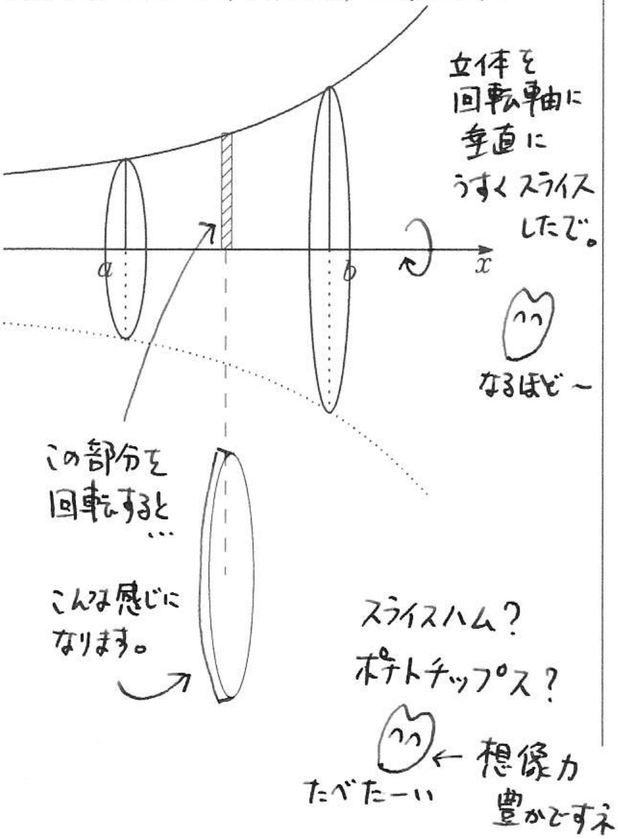
体積を求める場合も面積のときと同様に，「細かく切って寄せ集める」が原則です．

体積の問題は大きく分けて２通りに分かれます．それは「回転体」と「非回転体」です．「非回転体」とは「円柱のナナメ切り」に代表されるような立体で，どの方向から切っても体積を求めることができますが，回転体の場合は切る方向は限定されます．つまり，回転軸に垂直な断面を考えるのです．．

では，下図の斜線部分を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積はどうやって求めるのでしょうか．

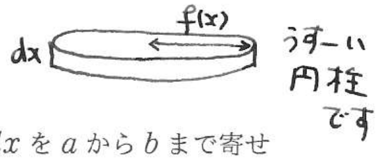



回転体の体積を求めるためには，まず回転軸に垂直な面で切ってから寄せ集める，と考えます．




細かく切った「短冊」１枚（縦 $f(x)$，横 $dx$ の長方形）を回転させると，薄い円板ができます．底面が半径 $f(x)$ の円，高さが $dx$ の円柱であるとみなせるのでその体積は

$$\pi\times\{f(x)\}^2\times dx$$




この円板の体積 $\pi\{f(x)\}^2dx$ を $a$ から $b$ まで寄せ集めればよいので，

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$$

となるのです．

「細かく切ってよせあつめる」まさに積分の真髄!!

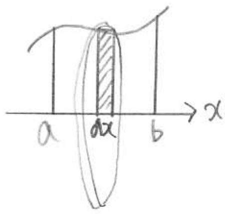
✎注　「回転してできた立体を切る」というよりも，「回転する前に切って，それを回す」というイメージです．

スゴ〜い

▷Point◁

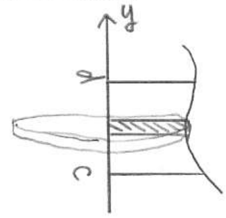
**$x$ 軸とで囲まれた部分を回転した体積**

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx$$




**$y$ 軸とで囲まれた部分を回転した体積**

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy$$




それでは具体例で計算のコツを学ぼう．

**例題**　$y=-x^2+2x$ と $x$ 軸で囲まれた部分について，次の体積を求めよ．

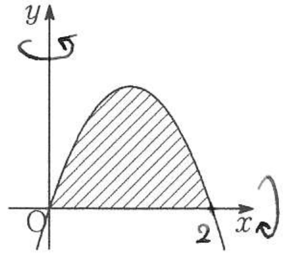
(1)　$x$ 軸の周りに回転させてできる立体．

(2)　$y$ 軸の周りに回転させてできる立体．

**考え方**

図の斜線部分を回転させるわけです．回転軸に垂直な面で切って考えよう．

たのしみー

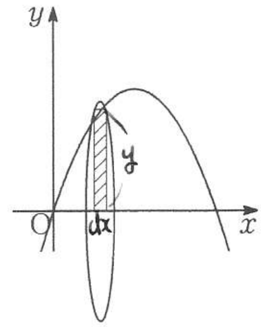


**解**

(1)

図の斜線部を回転させてできる微小区間の体積は

$$\underbrace{\pi y^2}_{\text{底面積}} \times \underbrace{dx}_{\text{厚み}}$$




よって，

$$V_x = \pi \int_0^2 (-x^2+2x)^2\,dx$$
$$= \pi \int_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= \pi\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}\pi$$

2乗するから計算が一気にキツクなる

う〜

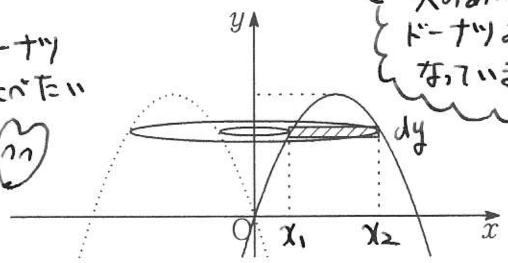
■

(2)　図の斜線部を回転させてできる微小区間の体積は

$$\pi({x_2}^2 - {x_1}^2) \times dx$$

断面が穴のあいたドーナツみたいになっています!!

ドーナツたべたい




$y=-x^2+2x$ より，$x^2-2x+y=0$.

$x$の2次方程式

よって，$x=1\pm\sqrt{1-y}$.

解の公式を使って解く

$x_1 = 1-\sqrt{1-y}$,　　$x_2 = 1+\sqrt{1-y}$ より，

よって，

$$V_x = \pi \int_0^1 (1+\sqrt{1-y})^2 - (1-\sqrt{1-y})^2\,dx$$
$$= \pi \int_0^1 2\cdot 2\sqrt{1-y}\,dx$$

因数分解したよ

$\bigcirc^2 - \triangle^2 = (\bigcirc+\triangle)(\bigcirc-\triangle)$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y}\,dx$$
$$= 4\pi\left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= 4\pi \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

ルートが出たときはあせったけど

■

意外に計算ラクやったな

ラッキ〜

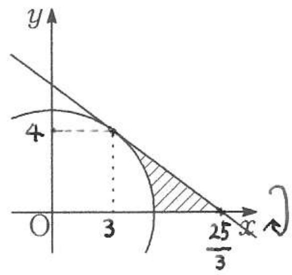
---

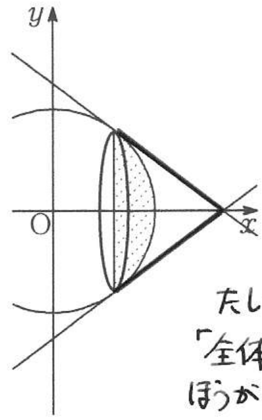
**例題**　円 $x^2+y^2=25$ と円上の点 $(3,\ 4)$ における接線，および $x$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸の周りに回転させてできる立体を求めよ.

**考え方**　先ほどの **例題** からもわかるように，体積の計算はかなりメンドウなので，少しでもラクに計算するように工夫しよう.

例えば，今回の場合，図の斜線部分を回転させるわけですが，細かく分割して足すよりも「全体から抜く」という発想がよいでしょう.

求める体積は，太線の円錐から図の点線部分を抜いたものになります.




たしかに「全体から抜く」ほうが簡単そう

工夫しよう

**解**　直線 $3x+4y=25$ と $x$ 軸との交点の座標は $\left(\frac{25}{3},\ 0\right)$. よって，円錐の体積は

$$\underbrace{\pi\times 4^2}_{\text{底面積}} \times \underbrace{\left(\frac{25}{3}-3\right)}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{3} = \frac{256}{9}\pi$$

円の上部を表す式は $y=\sqrt{25-x^2}$ なので，求める体積は

$$\frac{256}{9}\pi - \pi\int_3^5 \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2\,dx$$
$$= \frac{256}{9}\pi - \pi\int_3^5 (25-x^2)\,dx$$
$$= \frac{256}{9}\pi - \pi\left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_3^5$$
$$= \frac{256}{9}\pi - \pi\left\{25(5-3) - \frac{1}{3}(5^3-3^3)\right\}$$
$$= \frac{100}{9}\pi$$

2乗するからかえって楽になることもあるのネ

■

▷Point◁

特に，直線を回転させた立体の体積を求めるときは，積分計算するのではなく，図形の形（今回の場合は「円錐」）から体積を計算するのがポイント.

どんどん使おう!!