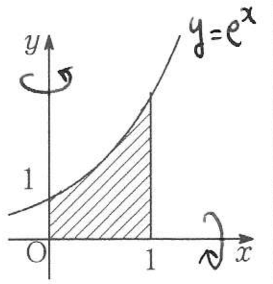
$y=e^x$ と x 軸，$x=0$ および $x=1$ で囲まれた部分について，次の体積を求めよ．
（1） x 軸の周りに回転させてできる立体．
（2） y 軸の周りに回転させてできる立体．

考え方
図の斜線部分を回転させるわけです．回転軸に垂直な面で切って考えよう．

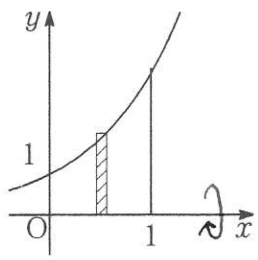


(2) はまともに計算してもできますが，「全体から引く」という手法をとる方が良いでしょう．

解 (1)
図の斜線部を回転させてできる微小区間の体積は

$$\pi y^2\times dx$$

よって，



これはカンタン
楽勝!!

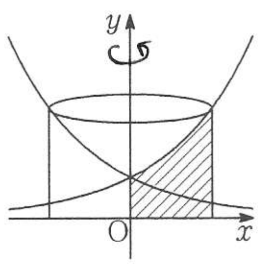
計算も
ラクです〜

$$V_x=\pi\int_0^1(e^x)^2\,dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

■

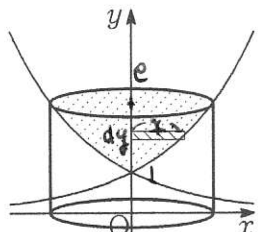
(2)
右図の斜線部を回転させてできる立体を考える．

どーすんの？



図の太線の大きな円柱から，図の点線部分の立体を引いたものだから，

そっかー
全体から抜けば
いいんや
OK



円柱の体積

$$V_y=\underbrace{\pi\times1^2}_{底面積}\times\underbrace{e}_{高さ}-\pi\int_1^e x^2\,dy$$

式の意味は
わかりますね？
はーい

$\pi\int_1^e x^2\,dy$ の計算について

定積分 $\pi\int_1^e x^2\,dy$ の計算方法としては，そのまま y で積分をする方法と x で置換積分する方法とがあります．どちらも紹介しておきます．なお，x で置換積分する場合は積分区間も変更になることを忘れないようにしよう．

そのまま y で積分する場合

$$\pi\int_1^e(\log y)^2\,dy=\pi\int_1^e y'(\log y)^2\,dy$$
$$=\pi\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e-\pi\int_1^e y\{(\log y)^2\}'\,dy$$
$$=e\pi-\pi\int_1^e y\cdot2(\log y)(\log y)'\,dy$$
$$=e\pi-\pi\int_1^e y\cdot2(\log y)\frac{1}{y}\,dy$$
$$=e\pi-\pi\int_1^e 2\log y\,dy$$
$$=e\pi-2\pi\Big[y\log y-y\Big]_1^e$$
$$=e\pi-2\pi\{(e-e)-(0-1)\}=e\pi-2\pi$$

うーん
計算ミスりそう
いやんのー

以上より，求める体積 V_y は

$$V_y=e\pi-(e\pi-2\pi)=2\pi$$

⇨注　$\int\log y\,dy=y\log y-y$ は暗記しておこう．

はーい

x で置換積分する場合

$y=e^x$ より $dy=e^x\,dx$．

y	$1\longrightarrow e$
x	$0\longrightarrow 1$

$$\pi\int_1^e x^2\,dy=\pi\int_0^1 x^2e^x\,dx$$
$$=\pi\int_0^1 x^2(e^x)'\,dx$$
$$=\pi\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\pi\int_0^1 2xe^x\,dx$$
$$=e\pi-\pi\int_0^1 2x(e^x)'\,dx$$
$$=e\pi-\pi\left(\Big[2xe^x\Big]_0^1-\int 2e^x\,dx\right)$$
$$=e\pi-\pi\left(2e-\Big[2e^x\Big]_0^1\right)$$
$$=e\pi-\pi(2e-(2e-2))$$
$$=e\pi-2\pi$$

logよりか
マシかな…
どっちもどっちや
いらーん

以上より，求める体積 V_y は

$$V_y = e\pi - (e\pi - 2\pi) = 2\pi$$

■

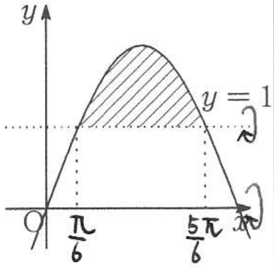
以上，2 通りの方法で計算しましたがあまり大差はないようです (若干，そのまま y で積分したほうが楽やったかなあって感じ).

いずれにしても確実な計算力が必要です．しっかりと計算できるようにしておこう．

次は非常に間違いの多い重要問題です．

> $y = 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = 1$ で囲まれた部分
> (1) x 軸の周りに回転させてできる立体.
> (2) $y = 1$ の周りに回転させてできる立体.

考え方　図の斜線部分を回転させます．回転軸に垂直な面で切って考えますが，断面の様子をしっかり区別しよう．



(1) も (2) も同じ微小区間を回転させるのですが，(1) の場合，x 軸のまわりに回転したときは，穴の開いたドーナツ状 (外側の半径が y で内側の半径が 1) になり，

(2) の場合，$y = 1$ の周りに回転したときは穴の開いていない円板 (半径 $y - 1$) になります．

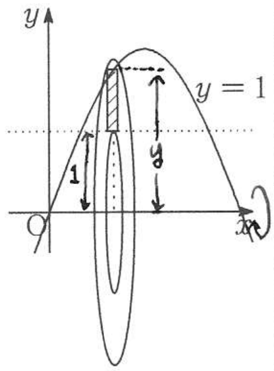
それぞれの断面積の求め方に注意しよう．

解

(1)

図の斜線部を x 軸のまわりに回転させると，外側の半径が y, 内側の半径が 1 の環ができるので，この微小区間の体積は

$$\pi(y^2 - 1^2) \times dx$$



x軸のまわりに回すと
ドーナツができるね

ドーナツ好き

よって，

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{(2\sin x)^2 - 1^2\}\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (4\sin^2 x - 1)\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4 \times \frac{1-\cos 2x}{2} - 1\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 2\cos 2x)\, dx \\ &= \pi \Big[\, x - \sin 2x \,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} \\ &= \pi\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

言うまでもなく
次数下げ

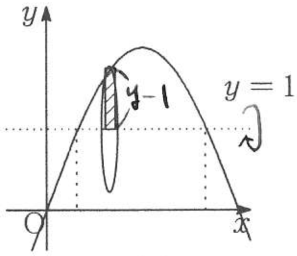
■

(2)

図の斜線部を $y = 1$ のまわりに回転させると，半径 $y - 1$ の円板ができるので，この微小区間の体積は

$$\pi(y-1)^2 \times dx$$

よって，



今度はフツーの
円板になります。

ふ〜ん
つまら〜ん

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin x - 1)^2\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (4\sin^2 x - 4\sin x + 1)\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4 \times \frac{1-\cos 2x}{2} - 4\sin x + 1\, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3 - 2\cos 2x - 4\sin x)\, dx \\ &= \pi \Big[\, 3x - \sin 2x + 4\cos x \,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \pi \left\{ 3\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} \\ &= \pi(2\pi + \sqrt{3} - 4\sqrt{3}) \\ &= \pi(2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

計算かなりヤバイな

トホホ…

■