いよいよ定積分


まってました!!
がんばるゾー

マニアックな不定積分より，ノーマルな定積分です．定積分の計算が本命なのです．

1　定積分の基本事項

このへんは
数学Ⅱの復習

▷Point◁

$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

と定義する．

注　「不定積分の一つ」という表現ですが，$f(x)$ の不定積分は無数にあるので，そのうちの好きなのを一つ選べということです．つまり何を選んでも良いのですが，例えば，次の場合

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx &= \Big[\,\log|x| + C\,\Big]_e^{e^2}\\ &= (\log e^2 + C) - (\log e + C)\\ &= (2 + C) - (1 + C)\\ &= 1\end{aligned}$$

となり，結局，積分定数 C は消えてなくなります．だから，**定積分の計算では，積分定数 C は最初から省略することにします．**

定積分の定義から次のことが成立します．

▷Point◁

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

考え方　意味を考えたら明らかですが，いちおう証明しときます．$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とします．

(1) の証明．

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

(2) の証明．

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(3) の証明．

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\\ &= (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b))\\ &= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

■

定積分を計算するには，**不定積分が正確に求められないとどうしようありませんが**，定積分の計算にはいろいろな迷信があるようです．

定積分にまつわる迷信


え～っ
そうとちゃうの？

迷信 ①

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値は面積を表す．

迷信 ②

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ では，常に $a < b$ である．

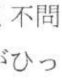
いずれも，**全くのデタラメ** です．


エッ？
マジっすか！

定積分が常に面積を表すと勘違いしている人は多いようです．定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とは，$f(x)$ の不定積分 $F(x)$ に b を代入したものから a を代入したものを機械的に引いただけです．$f(x)$ が **$a \leqq x \leqq b$ においてたまたま x 軸よりも上部にある場合だけ面積を表す**のです．

また，積分の上端と下端の大小関係も全く不問です．定積分の置換積分をすれば，大小関係がひっくり返ることなどザラにあります．

おかしな迷信を信じないようにしよう．


はーい
気をつけまーす

例題

(1) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^{3x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_\pi^{3\pi} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt$

考え方　数学 III の不定積分計算はちょっとでも油断するとすぐに間違ってしまう，まさに計算ミスのオンパレードです（この僕でさえ，よくミスる）．慎重に慎重を重ねて計算する必要があります．でも不定積分自体が間違えたら何もかもがパーなので，不定積分が求まったら，それを微分して元に戻るか必ず確認するクセをつけよう．

計算ミス多いねん…

もうイヤ…自信ないわ

はーい 確認しまーす

解

(1) 不定積分は問題ないでしょう．

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} e^{3x}\,dx &= \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\log 2}\\ &= \frac{1}{3}e^{3\log 2}-\frac{1}{3}e^0\\ &= \frac{1}{3}e^{\log 8}-\frac{1}{3}\\ &= \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

注　対数の定義に基づく重要な関係式

$$a^{\log_a M}=M$$

これこそが対数の定義ですゾ

を利用しています．この関係式は重要なのでしっかり頭に入れておこう．なぜ成り立つのか分からない人は赤阪まで質問に来てください．

■

(2) チカンしたりする人がいるのですが，その必要は全くありません．

$$\begin{aligned}\int_1^e\left(\frac{x+1}{x}\right)^2dx &= \int_1^e\frac{x^2+2x+1}{x^2}\,dx\\ &= \int_1^e 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \left[x+2\log|x|-\frac{1}{x}\right]_1^e\\ &= \left(e+2-\frac{1}{e}\right)-(1+0-1)\\ &= e+2-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

この変形がポイント

注　素直に展開して分子を分ければよいだけでした．このように分母が単項式の場合に有効です．なお，$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,dx$ は $\displaystyle\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ と解釈して，

$$\int\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-\frac{1}{x}$$

になることは言うまでもないでしょう．

もちろんよゆう．

■

(3) 全問と同様に分母が単項式なので分子を分ければ OK．

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx\\ &= \int_1^2\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx\\ &= \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^2\\ &= \left(\frac{3}{5}2^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}2^{\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\right)\\ &= \left(\frac{6}{5}2^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}2^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{9}{10}\\ &= -\frac{3}{10}2^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{10}\end{aligned}$$

ゆっくりと落ち着いて計算しよう

はーい

■

(4) 置換積分するまでもないザックリ積分です．

$$\begin{aligned}&\int_\pi^{3\pi}\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)dx\\ &=\left[4\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_\pi^{3\pi}\\ &=4\sin\frac{\pi}{2}-4\cdot 0\\ &=4\end{aligned}$$

ザックリ積分は必ずできるようになっておこう

はーい

■

(5) 先ほどと同じような問題ですが，今度はザックリ積分や置換積分するとうまくいきません（なぜうまくいかないのかは，やってみればわかります）．加法定理でバラシテから積分するしかありません．

できなくもない

$$\begin{aligned}&\int_1^2\sin\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{\pi}{4}\right)dt\\ &=\int_1^2\left(\sin\frac{2}{3}\pi t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi t\sin\frac{\pi}{4}\right)dt\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2\left(\sin\frac{2}{3}\pi t+\cos\frac{2}{3}\pi t\right)dt\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{3}{2\pi}\cos\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2}{3}\pi\right]_1^2\\ &=-\frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left[\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi\right]_1^2\\ &=-\frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\ &=-\frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\cdot\sqrt{3}\\ &=-\frac{3\sqrt{6}}{4\pi}\end{aligned}$$

落ち着いて計算しよう。ゆっくりでいいから正確に。決して難しくありませんからね。

つかれちゃった

■