2　定積分計算の工夫

少しでも
ラクをしたい

定積分計算は，ゆっくりと時間をかけて丁寧に計算すれば何の問題もないのですが，試験時間は限られているので，早く正確に計算するための工夫と知識が必要です．

特に，積分区間が $\int_{-a}^{a}$ の場合は，計算量を大幅に減らすことができます．

そのまえに次の重要なキーワードを確認しておこう．

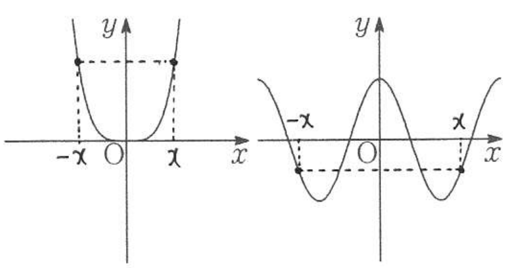
▷Point◁(偶関数と奇関数)

> 関数 $f(x)$ が，
> $f(-x)=f(x)$ という関係を満たすとき，
> $f(x)$ を偶関数，
> $f(-x)=-f(x)$ という関係を満たすとき
> $f(x)$ を奇関数
> という．
> 偶関数は y 軸対称で奇関数は原点対称なグラフである．

偶関数の代表的な例

$y=x^{2n}$，$y=\cos x$ など．

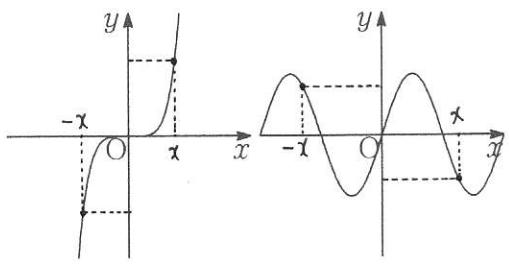
xのときと
−xのときの値が
同じです。



奇関数の代表的な例

$y=x^{2n+1}$，$y=\sin x$ など．

xのときと
−xのときの値が
異符号です。



✎注　「$x^{\text{偶数}}$ だから偶関数，$x^{\text{奇数}}$ だから奇関数」と発想するのはなかなか憶えやすい方法です．

✎注　これらの代表例が単独で表れることは少なく，たいてい融合した形で出てくるので，その都度，x のかわりに $-x$ を代入して，式の形がどのように変わるのか考えます．

> 次の関数は，偶関数か？　奇関数か？
> (1)　$y=\sin(1+x^2)$
> (2)　$y=x\sqrt{4-x^2}$
> (3)　$y=e^{x^3+x}$

グラフの形を
考えるのではなく
計算で調べるのです。

考え方　いずれも，x のかわりに $-x$ を代入して，式の形がどのように変わるのか考えるだけ．

ナルホド〜

解

(1) 偶関数　(2) 奇関数　(3) どちらでもない

参考　次の関係が成り立ちます．

(偶関数)×(偶関数)＝(偶関数)
(偶関数)×(奇関数)＝(奇関数)
(奇関数)×(奇関数)＝(偶関数)
正の数，負の数の掛け算のようです．

偶関数と奇関数の定積分で重要なことは次のことです．

▷Point◁

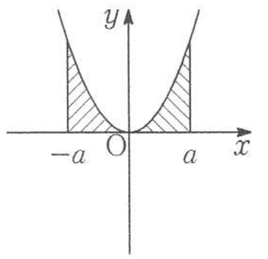
> $f(x)$ が偶関数のとき，
> $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
> $f(x)$ が奇関数のとき，
> $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$$

よく使うでー

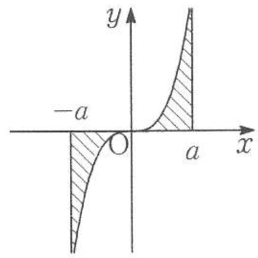
とても
大切

数学IIIの
微積分でも
登場ました．

考え方　厳密な証明は教科書に載ってますが，偶関数は y 軸対称，奇関数は原点対称なので，いずれも面積をイメージすれば明らかなことです．



図の斜線部分の面積は同じで定積分の値も同符号．



図の斜線部分の面積は同じだが定積分の値は異符号

面積をイメージすれば
簡単ですね ー

ナットク!!

▷Point◁

積分区間が異符号の場合は，まずは偶関数なのか奇関数なのかを調べてから積分すること．いつもどちらかの関数になるという保障はないが，「ひょっとしたら…」と疑ってかかる姿勢が大切である．

はーい
疑いの目で見ます…

例題 $\displaystyle\int_{-3}^{3}(2x^3+5x^2-3x+1)\,dx$

解 $\displaystyle\int_{-3}^{3}(2x^3+5x^2-3x+1)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{3}(5x^2+1)\,dx$ ← x^3とx^1を消す

$\displaystyle=2\int_{0}^{3}(5x^2+1)\,dx$ ← 積分区間をchange!!

$\displaystyle=2\left[\frac{5}{3}x^3+x\right]_0^3=96$

これは早い!!
ヤッター

例題

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}(e^x-e^{-x})^5\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx$

疑いの目で見よう，はたして…
じ〜っ

考え方 まずは，積分区間が異符号なので，中身の関数が偶関数なのか奇関数なのかを考えよう．

解 (1) $f(x)=(e^x-e^{-x})^5$ とすると，

$$\begin{aligned}\underline{f(-x)}&=(e^{-x}-e^x)^5\\&=\{-(e^x-e^{-x})\}^5\\&=-(e^x-e^{-x})^5=\underline{-f(x)}\end{aligned}$$

⊖が前に出た

よって，$f(x)=(e^x-e^{-x})^5$ は奇関数なので，

$$\int_{-a}^{a}(e^x-e^{-x})^5\,dx=0$$

xのかわりに −xを代入して式の形がどのようになるか調べます

(2) $g(x)=\sin^2 x$ とすると，

$$\begin{aligned}\underline{g(-x)}&=\sin^2(-x)\\&=(-\sin x)^2\\&=\sin^2 x=\underline{g(x)}\end{aligned}$$

形がかわらない

よって，$g(x)=\sin^2 x$ は偶関数なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx&=2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\\&=\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx\\&=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\pi\end{aligned}$$

計算がラクです
ラッキ〜

例題 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$

考え方 当然，三角関数の積和公式を用いて積を解消します．

この公式キラ〜い ← 自分で作りましょうね

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}$$

ここで，$\displaystyle\int\cos(m+n)x\,dx$ は，

$$\int\cos(m+n)x\,dx=\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+C$$

ですが，$\displaystyle\int\cos(m-n)x\,dx$ は，

$$\int\cos(m-n)x\,dx=\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x+C$$

???
ナンデ〜
あかんの?

としてはいけません．なぜだかわかりますか．それは問題文に「m，n が正の整数」と書いてあるからです．つまり，$m+n$ は0にはならないが，$m-n$ は0になる可能性がある，つまり $\dfrac{1}{m+n}$ は問題ないが，$\dfrac{1}{m-n}$ は分母は0になる場合があるのでちょっとマズイというわけ．よって，この問題の解答はこのヤバサを最初から予想して，場合分けからスタートします．いきなり場合分けを思いつくのではありません．「やってみたらヤバイことに気づいたので場合分けの必要性を感じた」というのが正しい思考方法でしょう．

ふ〜ん

解 $m=n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx&=\int_0^{\pi}\cos^2 mx\,dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$m\neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}\\&=0\end{aligned}$$

➾注 $\sin mx\cos nx$ や $\sin mx\sin nx$ の場合も必ずやっておこう．4STEPにあります．

はーい
やりませ〜ん
↑
ダメ