東京大学からのお便り

いよいよ
トーダイかぁ〜
しみじみ…

東京大学から次の『お便り』が届きました．今の段階で何とか解読できそうです．挑戦してみましょう．

東京大学入試問題（1990 年度前期理系）

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

見おぼえあるゾ…

ムムム…

考え方　$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ や $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ を具体的に計算することは不可能です．にも関わらず，$\lim_{n\to\infty}a_n$ や $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよということなので，言うまでも無く「ハサミウチの原理」を使うことになります．となれば，a_n や b_n を何かで挟まなければなりません．和の形を何かで挟むためには・・・・・やっぱり「面積比較」です．この問題も「面積でやろう」と思うかどうかが運命の分かれ道でした．

✎注　面積を使わなくてもできなくもありませんが，かなりメンドウ方法になるので，やっぱり「面積比較」がベストです．

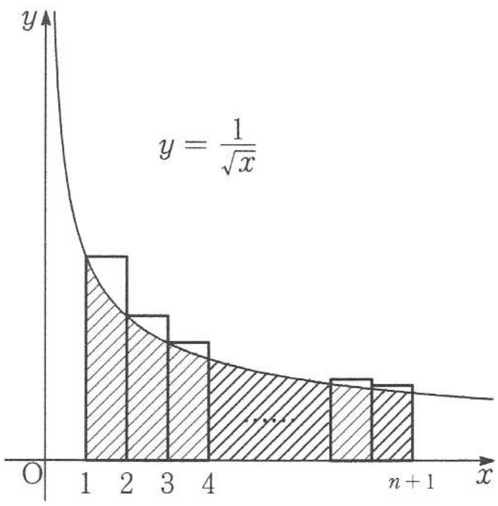
やっぱり〜
大好きなやつや

解

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフを考える．

下図の長方形の面積の総和は斜線部分の面積よりも大きいので，

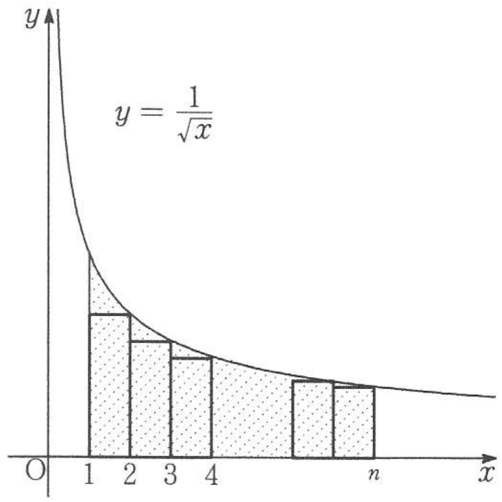
$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$



下図の網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きいので，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



したがって，以上より，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{n}$$

$$\therefore\ 2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}-1\quad\cdots\cdots①$$

このへんは　ラッキ〜
この前の
大阪大学と全く同じ〜

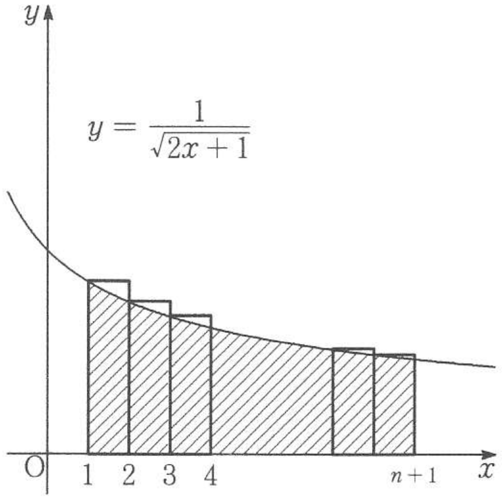
ここで，$n\longrightarrow\infty$ とすると，$2(\sqrt{n+1}-1)\longrightarrow\infty$ なので，「追い出しの原理」より，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

OK!!

次に，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ のグラフを考える．

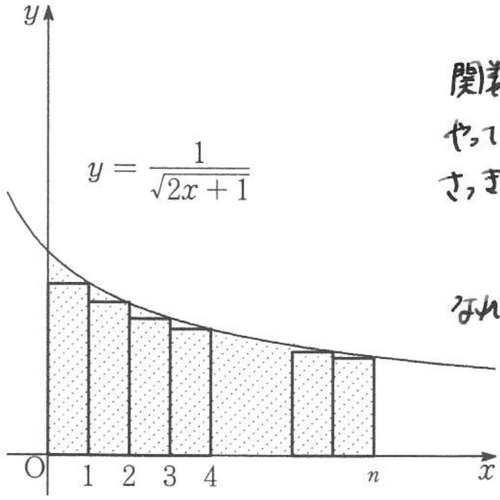
下図の長方形の面積の総和は斜線部分の面積よりも大きいので，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$



下図の網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きいので，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\int_0^{n}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$



関数がちがうけど
やってることは・
さっきと全く同じ～
なれたもんです…

したがって，以上より，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\int_0^{n}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

$$\Big[\sqrt{2x+1}\Big]_1^{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\Big[\sqrt{2x+1}\Big]_0^{n}$$

$$\therefore\ \sqrt{2n+3}-\sqrt{3}<b_n<\sqrt{2n+1}-1\quad\cdots\cdots②$$

したがって，①② より，各辺が正であることに注意して，

①より $\dfrac{1}{2\sqrt{n}-1}<\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}-1)}$
と解釈して，辺々をそれぞれかけた，と考えます。
ナルホド～

$$\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{n}-1}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2(\sqrt{n+1}-1)}$$

$$\frac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{\dfrac{3}{n}}}{2-\sqrt{\dfrac{1}{n}}}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)}$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，最左辺，最右辺はいずれも $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に収束するので，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ヤッホーイ
東大合格!!

■

東大の数学の入試問題には際立った特徴があります．それは，しっかりとした数学的基礎（とそれを縦横無尽に使いこなせる力）があれば解くことができるが，反対に，単なる過去問の反復練習の量や機械的な処理，解法の技術の丸暗記のような浅はかな知識の集積では歯が立たない，ということです．そういう意味でいわゆる「簡単な難問」が何十年にも渡って出題されてきました．中には超難問もありますが，大半は数学の本質を突いた良問ばかりなので，東大の問題を見たら「トーダイ？絶対ムリ！！」と諦めるのではなく，果敢に挑戦してほしいと思います．解ければ大きな自信につながると思いますよ．

トーダイの問題って
とってもおもしろいよ