ヤバいグラフ5連発

なんで
ヤバイの～？

これから，とても重要ですがヤバいグラフを5つ紹介します．

どれもシンプルな式ですが…　うん

ヤバいグラフ Big 5

(1)　$y=\dfrac{x}{e^x}$　(2)　$y=xe^x$　(3)　$y=\dfrac{\log x}{x}$　(4)　$y=x\log x$　(5)　$y=\dfrac{e^x}{x}$

パッと見，簡単そうです．y' や y'' の計算も簡単だし，極値や変曲点もすんなり分かります．なのに何がヤバいのでしょうか．

それは，極限値の計算です．(1)(2) は定義域がすべての実数なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の計算を，(3) と (4) は，定義域が $x>0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ の計算をせねばなりません．(5) は定義域が $x \neq 0$ なのでもっとメンドウです．これら計算がヤバヤバなのです．ポイントとなるのは $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$ です．この結果だけを使って，5つのグラフのヤバイ極限値を計算することができます．この結果はたいていは問題文に与えられていますが，与えられてなくても勝手に用いて構いません．

よかったー
安心したー

$y=\dfrac{x}{e^x}$ のグラフ　（定義域は実数全体）

$$y'=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$$
$$y''=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-2+x}{e^x}$$

よって増減表は以下の通り．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘

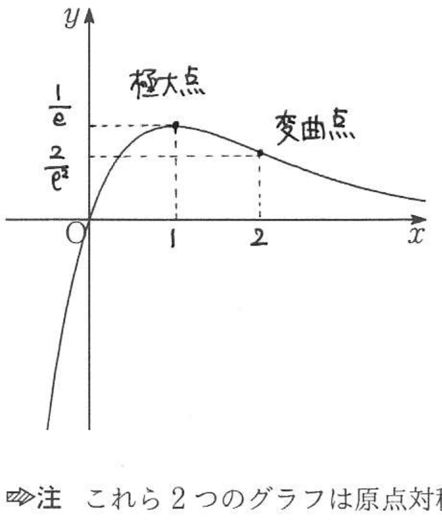
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$,

この置き換えが
ポイント!!

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}$ について．$x=-t$ とおくと，

$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ なので，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{-t}}=\lim_{t\to\infty}(-te^t)=-\infty.$



$y=xe^x$ のグラフ　（定義域は実数全体）

$$y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$$
$$y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

よって増減表は以下の通り．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$		$+$
y	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

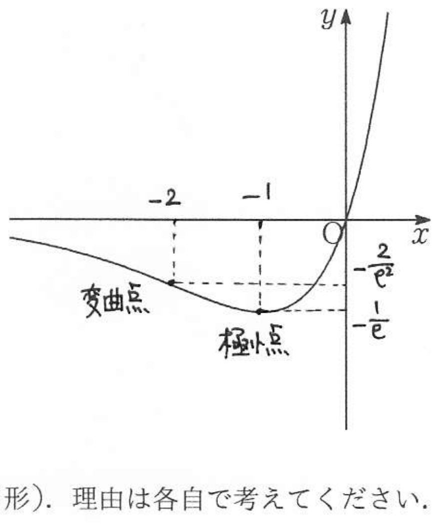
この置き換えが
ポイント!!

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x$ について．$x=-t$ とおくと，

$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ なので，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to\infty}(-t)e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=0.$



注　これら2つのグラフは原点対称です（つまり同じ形）．理由は各自で考えてください．

もう
わかってまーす
はーい

$y = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフ　(定義域は $x > 0$)

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

($y' = 0$ となる x は $x = e$)

$$y'' = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2 - (1-\log x)2x}{x^4}$$
$$= \frac{-x-2x+2x\log x}{x^4} = \frac{-3+2\log x}{x^3}$$

($y'' = 0$ となる x は $x = e^{\frac{3}{2}}$)

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$		$-$
y''		$-$		$-$	0	$+$
y	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘

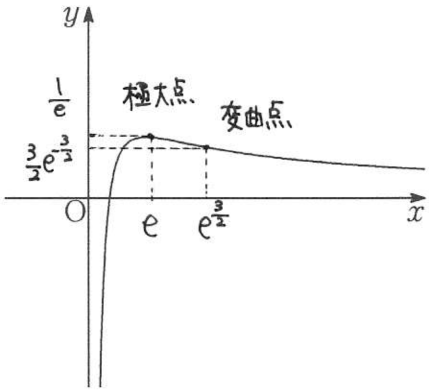
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x} = -\infty$. (コレは明らかですね)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ について.　この置き換えがポイント!!

$\log x = t$ とおくと, $e^t = x$ であり,

$x \longrightarrow \infty$ のとき $t \longrightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0.$$



$y = x\log x$ のグラフ　(定義域は $x > 0$)

$$y' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \log x$$

($y' = 0$ となる x は $x = \frac{1}{e}$)

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0$ なのでグラフは常に下に凸.

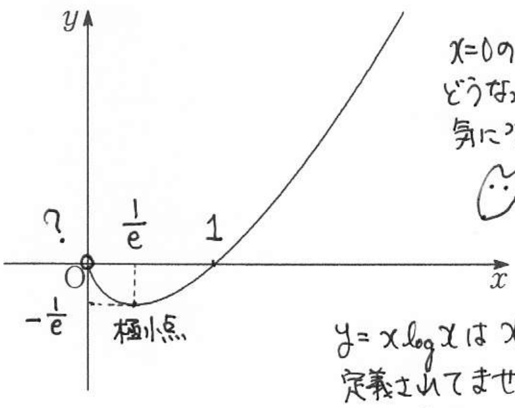
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$		$+$
y	(0)	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log x = \infty$. (コレは明らかですね)

$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ について. $\dfrac{1}{x} = t$ とおくと,　この置き換えがポイント!!

$x \longrightarrow +0$ のとき $t \longrightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(-\log t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right) = 0.$$



x=0のあたりでどうなっているのか気になる〜

ふっしぎー

$y = x\log x$ は $x=0$ で定義されてませんが $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ なので原点にどんどん近づいていくことになります。(でも原点にはたどりつきません)

かなしー

$y = \dfrac{e^x}{x}$ のグラフ　(定義域は $x \neq 0$)

$$y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

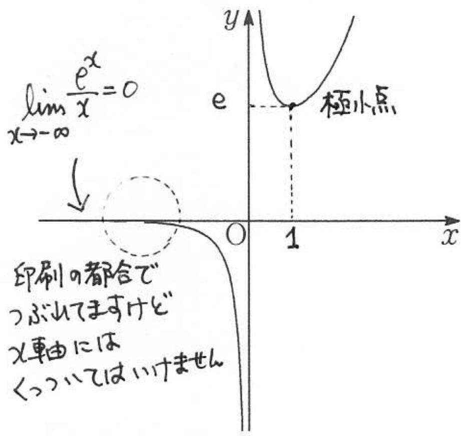
(y'' の計算はあんまり意味がないので省略)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	↘		↘	e	↗

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{e^x}} = \infty.$$

➾注 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$(正確には $+0$) だから.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{te^t}\right) = 0.$$



どれもこれも不思議なグラフやったなー

たのしー

➾注 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x} = \infty$ と $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x} = -\infty$ についても言及すべきですが, まあ明らかでしょう.

OK