知っておかないとヤバイ極限値

なんで
ヤバイの〜

次の問題は授業でも紹介しましたが，超重要かつ超有名問題なのでもう一度解説します．

例題 1.
(1) $x>0$ とき，次の不等式を証明せよ．

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

(2) (1) の不等式を利用して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ を求めよ．

考え方

(1) は不等式の証明なので (左辺) − (右辺) > 0 であることを示します．つまり，

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$$

とし，$x>0$ において $f(x)>0$ であることを示せばよいのです．式変形では無理なので，当然，$y=f(x)$ のグラフを考えて視覚的に証明します．

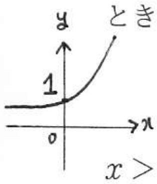
(2) は，「不等式を利用して極限値を計算せよ」とくれば，当然，「ハサミウチの原理」です．

解

(1) $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ とおく．このとき，

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$
$$f''(x) = e^x - 1$$

f'(x)>0かどうか
まだわからないので
もう1回微分します



$x>0$ において $e^x>1$ なので，$f''(x)>0$．

これは
グラフより
明らか
です

よって，$f'(x)$ は $x>0$ において単調増加．

また，$f'(0)=0$ なので，$f'(x)$ が単調増加であることより，$x>0$ において，$f'(x)>0$．

よって，$f(x)$ は $x>0$ において単調増加．

また，$f(0)=0$ なので，$f(x)$ が単調増加であることより，$x>0$ において，$f(x)>0$．

$$\therefore\ e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (x>0)$$

(2) $x>0$ において (1) の不等式の両辺は正なので，逆数をとると，

$$\frac{1}{e^x} < \frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

不等式の各項に x をかけると，$x>0$ なので，

$$\frac{x}{e^x} < \frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

ここで，$x\longrightarrow\infty$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} = 0$$

$\dfrac{x}{e^x}>0$ なので，ハサミウチの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

0に収束

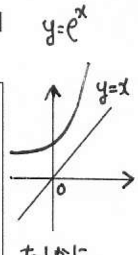
■

▷Point◁

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

※この極限値は暗記しておくこと．

分母も分子も∞に発散しますが 分母の e^x の方が分子の x よりも はるかにデカイことを意味してます。



たしかに
e^x の方が
デカクなり方が
ハンパないね

たしかに…

注 また，n を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ も成立します（証明は省略）．これも暗記しておこう．

例題 2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることを用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

※この極限値も暗記しておくこと．

真数>0より
$x>0$ なので
$x\to0$ ではなく
$x\to+0$ と
なります

解 (1) $\log x = t$ とすると，$e^t = x$ であり，$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$$

このへんの
置きかえ方は
とても大切

(2) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow+0$ のとき $t\longrightarrow\infty$ なので，

$$\lim_{x\to+0}x\log x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(-\log t)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right) = 0$$

■

フムフム
しらんかったー

注 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ はできれば暗記しておきたいところ（いきなりノーヒントで証明を求められることはありません）．

関数のグラフを書く際には勝手に使って構いません．ご丁寧に「〜は使ってもよい」と指示される場合もありますから安心してください．

よかったー

いちいち
やっとれんわい

とは言うものの，いきなり変な極限値が出てきたらアセッてしまいます．そんなときに役に立つのが次に紹介する『ロピタル($l'Hospital$)の定理』です．

ロピタルの定理は $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ や $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形 $\left(\dfrac{0}{0}\text{ や }\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ の場合に成り立つ公式です．

▷Point◁(ロピタルの定理)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

うーん
シンプルで
味わい深い

うん

『ロピタルの定理』は，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の極限と，分母分子を微分した $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ の極限が等しいということを意味しています．つまり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の極限が求めにくい場合に，分母分子を微分して $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ の極限を考えればよいのです．

ふーん　便利やけど
不思議な定理やなあ…

『ロピタルの定理』を使えば，次のようなメンドウな極限値計算もチョ〜簡単に求めることができます．

分母と分子を
それぞれ
微分していく．

【例】 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

分母と分子をそれぞれ微分します。
1回でムリなら，2回，3回… と続けます。

【例】 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$

スゲ〜
めっちゃ楽やん!!

➾注 もちろん『ロピタルの定理』を使わなくてもフツーに解けますよね(これは基本問題ですゾ)．

先ほどのヤバイ極限値も一発で求められます．不等式やハサミウチの原理など全く不必要です．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

カンターン　ロピタルさん
ありがとう!!

大学入試では，『ロピタルの定理』を用いなくても解けるように誘導などがついてますが，**知ってると答えの見当をつけたり，検算のときに大変便利**なので憶えておきましょう．

もっちろーん

➾注 『ロピタルの定理』を紹介すると必ず「テストで使って良いんですか」という質問を受けます．そうですねえ．大学入試で実際に採点するのは大学の先生ですから，その採点担当者がどう判断するかは全く分からないのでなんとも言えませんね．**使わないほうが無難**でしょうね．センター試験ならまだしも，記述試験で「答えだけでよい」問題が出題される可能性は極めて低いでしょう．

えっ
そうなん？

あかんの？
いいやん

そもそも『ロピタルの定理』で簡単に答えが出てしまうような単純な問題や，逆に『ロピタルの定理』を知らないと手も足も出ないような難問が，少なくとも 君たちが目指しているような大学で出題されるとは到底思えません．

参考 「証明してからなら使っても良いだろう」と言う人もいるかもしれませんが，おそらくムリです．証明できません．

『ロピタルの定理』を証明するには，『コーシーの平均値の定理』を利用します(みんなが知っている平均値の定理は『ラグランジュの平均値の定理』と呼ばれています)．

▷Point◁(コーシーの平均値の定理)

$f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続であり，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．さらに，$(a,\ b)$ のどの点においても $f'(x)$，$g'(x)$ が同時に 0 になることはないものとする．このとき，$g(a)\neq g(b)$ ならば，

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\quad a<c<b$$

をみたす c が存在する．

この『コーシーの平均値の定理』から『ロピタルの定理』を導き出すことができます．が，証明を書くには余りにも紙面が狭すぎるので省略させていただきます．あとは各自でお調べください．

はーい　絶対に
調べませーん