数学 III は役に立つのかな？

数II VS 数III 注目の対決!!

勝負!!

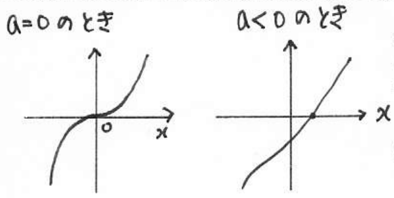
次の問題は数学 II の問題です．いわゆる 3 次方程式の解の個数に関する問題で，このタイプの問題は定数を分離してグラフで考えるのが基本なのですが，数学 II では分数関数のグラフは習っていなかったので，極大値と極小値の符号を考えるという非常にメンドウな解答をしました．

さて，数学 III を用いれば分数関数のグラフは簡単に (?) 書けるので定数を分離して解けそうです．

この問題を数学 II の手法と数学 III の手法で解き比べてみましょう．どっちに軍配が挙がるかな？

例題 1. 方程式 $x^3-3ax+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

解 数学 II 的解答



いずれの場合も単調増加になるので x軸との交点は 1個だけ

フムフム

$f(x)=x^3-3ax+a$ とおくと，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

(i) $a \leqq 0$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ なので，$y=f(x)$ のグラフは単調増加である．

よって，$y=f(x)$ のグラフは x 軸とただ 1 回だけ交わるから，$f(x)=0$ の実数解の個数は 1 個である

(ii) $a>0$ のとき

$f'(x)=3(x^2-a)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$.

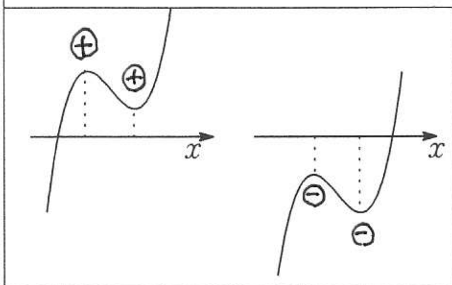
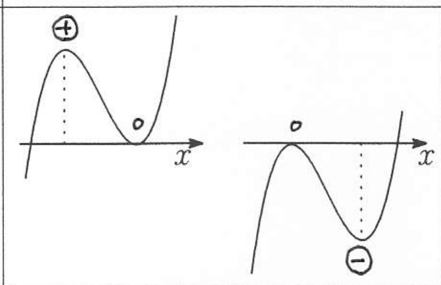
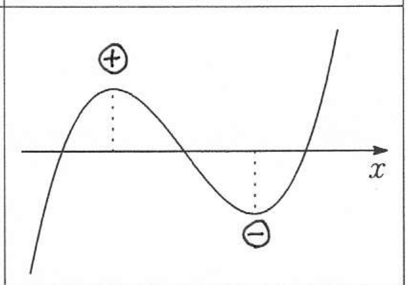
よって増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極大	↗	極小	↘

$f(-\sqrt{a})=-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+a=a+2a\sqrt{a}$

$f(\sqrt{a})=a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+a=a-2a\sqrt{a}$

増減表よりこのとき $f(x)$ は極値をもつので，実数解の個数はグラフより以下のように分類される．

実数解 1 個	実数解 2 個	実数解 3 個
		
極大値と極小値が同符号	極大値と極小値のどちらかが 0	極大値と極小値が異符号
$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$	$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=0$	$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0$

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=(a+2a\sqrt{a})(a-2a\sqrt{a})=a^2-4a^3=a^2(1-4a)$. よって，

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0 \iff a^2(1-4a)>0 \iff 1-4a>0 \quad \therefore\ 0<a<\frac{1}{4}\text{ のとき 1 個}$$

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=0 \iff a^2(1-4a)=0 \iff 1-4a=0 \quad \therefore\ a=\frac{1}{4}\text{ のとき 2 個}$$

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0 \iff a^2(1-4a)<0 \iff 1-4a<0 \quad \therefore\ a>\frac{1}{4}\text{ のとき 3 個}$$

(i)(ii) より，$f(x)=0$ の実数解の個数は，

$a<\frac{1}{4}$ のとき 1 個，　$a=\frac{1}{4}$ のとき 2 個，　$a>\frac{1}{4}$ のとき 3 個，

(i)より．$a \leqq 0$ のときも 1個だったので $0<a<\frac{1}{4}$ と合わせて $a<\frac{1}{4}$ としました。

う〜ん．前にやったときも思ったけど．かなりメンドクサいなあ〜

いやや〜

解 $\boxed{\text{数学 III 的解答}}$

$x^3-3ax+a=0$ より，$(3x-1)a=x^3$．$x=\dfrac{1}{3}$ のとき，式は成立しないので，$x \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$．よって，

$$x^3-3ax+a=0 \iff a=\frac{x^3}{3x-1}$$

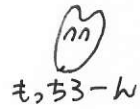
“3x−1”で割りたいので 3x−1≠0 であることをちゃんと確認しているのです。

したがって，3 次方程式 $x^3-3ax+a=0$ の解は，2 つのグラフ $y=a$ と $y=\dfrac{x^3}{3x-1}$ の交点の x 座標である．

$$y'=\frac{3x^2(3x-1)-x^3\cdot 3}{(3x-1)^2}=\frac{6x^3-3x^2}{(3x-1)^2}=\frac{3x^2(2x-1)}{(3x-1)^2}$$

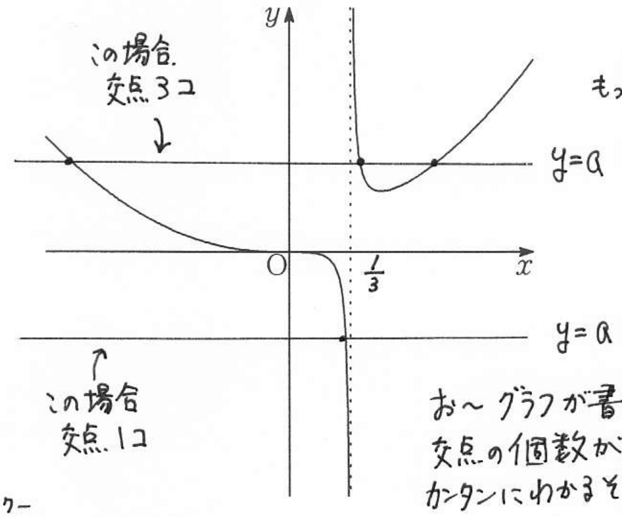
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-\dfrac{1}{x}}=\infty. \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3-\dfrac{1}{x}}=\infty$$

もうグラフは完ペキに書けますよね？



よって，$y=\dfrac{x^3}{3x-1}$ の増減表は以下の通り．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	$\times$	↘	$\frac{1}{4}$	↗

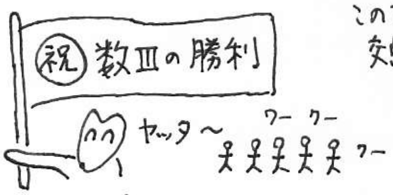


よってグラフより，$y=a$ との交点の個数を数えると，

$a<\dfrac{1}{4}$ のとき 1 個

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき 2 個

$a>\dfrac{1}{4}$ のとき 3 個



お〜 グラフが書けたら交点の個数がカンタンにわかるぞ

参考 割り算を実行すると $y=\dfrac{x^3}{3x-1}=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{27(3x-1)}$ なので，このグラフは漸近線ではなく漸近曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{27}$ をもっています．つまり，2 次関数のグラフ $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{27}$ に近づくのです．グラフを見ると確かにそんな感じがしますね．直線ではなく曲線に近づくとは！

> 2 つの **解** を比べてどうでしょうか．僕としては $\boxed{\text{数学 III 的解答}}$ の方がスッキリとして明解だと思います．分数関数のグラフを書くのがちょっとメンドウかもしれませんが，$\boxed{\text{数学 II 的解答}}$ の計算に比べればはるかに楽です．数学 III が不要な人も，分数関数の書き方はマスターしておいた方が良さそうですね．でも，$\boxed{\text{数学 II 的解答}}$ の極値の符号を考えるという手法も重要なので，これはこれで理解しておきましょう．

例題 2. 次の方程式の実数解の個数を調べよ

(1) $x^3-ax+2a=0$

(2) $2x-1=ae^{-x}$

考え方 (1) は $\boxed{\text{数学 II 的解答}}$ でも解けますが，やっぱり分数関数のグラフに持ち込むべき．

(2) は完全に数学 II の範囲を超えるので，グラフ利用しかなすすべがありません．

解 (1) ($x \fallingdotseq 2$ を確認した上で)$a=\dfrac{x^3}{x-2}$ とし，$y=\dfrac{x^3}{x-2}$ のグラフを考える．

(2) $a=(2x-1)e^x$ とし，$y=(2x-1)e^x$ のグラフを考える．　　（以下，略）