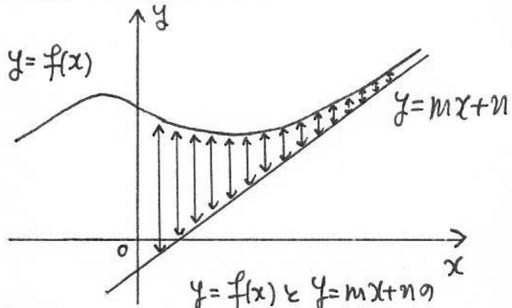
漸近線のヒミツ

（漸近線の一般論．上級者向けなのであんまり気にせんでよろしい）

いままで何となく漸近線を扱ってきましたが，ここらできっちりと漸近線の秘密に迫ってみたいと思います．「漸近線がわからん」という声をよく聞くのですが，実際問題として，漸近線についてあんまり深く突っ込まれることはないので，気楽に考えてください．入試でもほとんど出題されませんしね．

そもそもゼンキンセンとは一体何なのか？？？



$\boxed{y = f(x) \text{ の } x \longrightarrow \infty \text{ における漸近線が } y = mx + n \text{ である}}$

とは，つまり，

$\boxed{x \longrightarrow \infty \text{ のときに } y = f(x) \text{ が直線 } y = mx + n \text{ に近づく}}$

ということ．

y=f(x)とy=mx+nの距離（差）が、どんどん縮まっていく、ということ。

「近づく」とは「距離（つまり差）がどんどん縮まっていく」ということだから，

$\boxed{x \longrightarrow \infty \text{ のときに } y = f(x) \text{ と } y = mx + n \text{ との差が } 0 \text{ に近づく}}$

と考えることができます．したがって，

フムフム　ナルホド～

▷Point◁（漸近線の定義）

> $y = f(x)$ の $x \longrightarrow \infty$ における漸近線が $y = mx + n$ である．
>
> $\iff \displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = 0$ が成立する
>
> 同様に，$x \longrightarrow -\infty$ における漸近線の場合は，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = 0$ を考える．

参考　ていうか，「$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = 0$ を満たす m，n が存在するとき，$y = mx + n$ を $x \longrightarrow \infty$ における $y = f(x)$ の漸近線であると定義する」というのが正しい表現です．

ふ～ん　まあエエわ

ようするに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = 0$　…(※)　を満たす m，n を求めればよいわけです．

じゃあ，どうやって求めるのか．具体例で考えてみよう．

$\boxed{m \text{ を求めるには？}}$

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right)$$

であるので，$x \longrightarrow \infty$ のとき，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0$$

でなければならない（必要条件）．　…①

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{n}{x} = 0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0$

すなわち，

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

とにかくこの極限値を計算すればmの値が求まります

によって m が確定する．

ふ～ん

$\boxed{n \text{ を求めるには？}}$

先ほど決まった m を，(※) に代入して

$$n = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - mx\}$$

を計算することで n を求めることができる．

➾**注**　① について．なぜだかわかるでしょうか？

？？？　なんで～

もし $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right)$ が 0 以外の値（例えば $\alpha \neq 0$）に収束したとすると，

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\alpha$$

このとき，$x \longrightarrow \infty$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\alpha$ は $+\infty$ か $-\infty$ に発散することになり，0 に収束することは絶対にありえないからです．

だから，少なくとも，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right)$ は 0 に収束する必要がある，というわけです．

必要条件というわけね

ナットク!!　OK

漸近線の求め方は何となくわかったと思いますが，そもそも，漸近線があるのか，ないのかはどのようにして判定するのでしょうか．

▷Point◁(漸近線の有無の調べ方)

$\boxed{\text{START}}$

⇓

$\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ が存在しますか？}}$ $\xrightarrow{No}$ $\boxed{\text{漸近線は存在しない}}$

残念でした～ なかったわ
ごくろーさんでした～
はい、
おつかれさん

⇓ *Yes*

$\boxed{m=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ とおく}}$

⇓ *Yes*

$\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)\text{ が存在しますか？}}$ $\xrightarrow{No}$ $\boxed{\text{漸近線は存在しない}}$

残念!! またないわ
ごくろーさん.
はい
おつかれ～

⇓ *Yes*

$\boxed{n=\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)\text{ とおく}}$

⇓ *Yes*

$\boxed{\text{漸近線 } y=mx+n \text{ が存在する}}$

やったー
やっと求まった!!

それにしても、いちいち
メンドクサイ判定やな…
もうちょっと
何とかならんの？

上の流れに従えば，漸近線の有無を調べることができますが，いちいちこんなことするのは大変です．関数の式をパッと見て，漸近線があるのかないのか，すぐに判定できないものでしょうか．

ぜひとも
知りたい!!

実は次のような裏ワザがあります．

ナニ？
ウラワザ？

▷Point◁(漸近線発見の裏ワザ)

高校段階で登場する関数で漸近線をもつのは，赤阪の経験上，たいてい次の場合に限られる。

① 分数関数 $y=\dfrac{(n+1)\text{次式}}{n\text{次式}}$ タイプ（つまり，(分子の次数) = (分母の次数) + 1 となる場合）は，軸に平行でない漸近線をもつ．このとき，(分子) ÷ (分母) の割り算を筆算で実行して，$y=(px+q)+\dfrac{(n-1)\text{次式以下}}{n\text{次式}}$ と変形することができ，$y=px+q$ が漸近線となる $\left(\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)\text{次式}}{n\text{次式}}=0\text{ になることがポイント}\right)$．

フムフム

なお，分数関数 $y=\dfrac{n\text{次式}}{n\text{次式}}$ タイプ（分母分子の次数が同じ）は x 軸に平行な漸近線をもつ．
定義域が $x \neq a$ の場合，$x=a$ が y 軸に平行な漸近線になる場合が多い．

② 双曲線の上半分または下半分の式（例えば，$y=\sqrt{x^2-1}$ や $y=\sqrt{x^2+4}$ など）が式の一部分に入っている場合．

これはなかなか興味深い見分け方や

【漸近線クイズ】次の関数のうち，漸近線をもつものはどれか．直感で答えよ．またどんな漸近線になるのかも直感で答えよ．

(1) $y=\dfrac{4x}{x^2+2}$　(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$　(3) $y=x+\sqrt{1-x^2}$　(4) $y=x-2\sqrt{x^2-1}$

もう
わかったゾ

???…