こんな問題は，やらなくていいよ

だったら
なんで、こんなプリント
作ったん？

↓

質問が多い
からです!!
入試にあんまり
出ないのにね…

ガーン

例題 1 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ の漸近線の方程式を求めよ．

解

$x\longrightarrow\infty$ における漸近線

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots ①$$

をみたすような m，n を求める．

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(mx+n)\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m-\frac{n}{x}\right)$$

なので，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m\right)=0$$

$$\therefore\quad m=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

このとき，n は，① に $m=0$ を代入して，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-n\right)=0$$

より，

$$\begin{aligned}n&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\&=1\end{aligned}$$

分母・分子を
xで割る。

したがって，$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ の $x\longrightarrow\infty$ における漸近線は $y=1$ である．

あー しんどかった

$x\longrightarrow-\infty$ における漸近線

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots ②$$

をみたすような m，n を求める．

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(mx+n)\right\}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m-\frac{n}{x}\right)$$

なので，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-m\right)=0$$

$$\therefore\quad m=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

このとき，n は，② に $m=0$ を代入して，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-n\right)=0$$

より，

$$\begin{aligned}n&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}\\&=-1\end{aligned}$$

$x\to-\infty$ なので
$x=-t$ と変数変換して
$t\to\infty$ にします。

分母・分子を
tで割る。

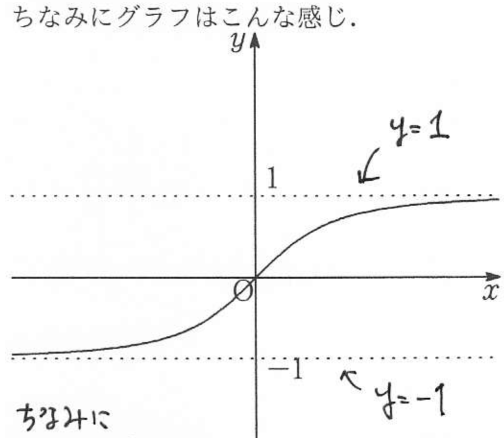
ok
よくやる
手法です

したがって，$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ の $x\longrightarrow-\infty$ における漸近線は $y=-1$ である．

あー
めんどくさー

■

ちなみにグラフはこんな感じ．



ちなみに
グラフは原点対称
↓
xのかわりに$-x$を
代入すると符号が変わる．
（奇関数、とも言います）

やってる極限値計算自体は
たいしたことないけど…
かなりメンドウですね

うー

例題 2 $y=2x+\sqrt{x^2-1}$ の漸近線の方程式を求めよ．

解 定義域は $x^2-1 \geqq 0$ より，$x \leqq -1,\ 1 \leqq x$

$\boxed{x \longrightarrow \infty \text{ における漸近線}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{2x+\sqrt{x^2-1}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots ①$$

をみたすような m，n を求める．

$$\lim_{x\to\infty}\left\{2x+\sqrt{x^2-1}-(mx+n)\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)$$

なので，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m\right)=0$$

よって，

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=2+1=3$$

このとき，n は，① に $m=3$ を代入して，

$$\lim_{x\to\infty}\{2x+\sqrt{x^2-1}-(3x+n)\}=0$$

より，

有理化してます

$$n=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

したがって，$y=2x+\sqrt{x^2-1}$ の $x\longrightarrow\infty$ における漸近線は $y=3x$ である．

$\boxed{x \longrightarrow -\infty \text{ における漸近線}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{2x+\sqrt{x^2-1}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots ②$$

をみたすような m，n を求める．

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{2x+\sqrt{x^2-1}-(mx+n)\right\}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)$$

なので，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-m\right)=0$$

よって，

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{t^2-1}}{-t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(2-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)$$
$$=2-1=1$$

言うまでもなく $x=-t$ と変数変換しています。

OK よくやる手法や

極限値の計算は特に問題ないね

うん・たぶん

このとき，n は，② に $m=1$ を代入して，

$$\lim_{x\to\infty}\{2x+\sqrt{x^2-1}-(x+n)\}=0$$

より，

$$n=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-1}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-1}-t)(\sqrt{t^2-1}+t)}{\sqrt{t^2-1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{t^2-1}+t}=0$$

またまた変数変換（$x=-t$）

そして有理化

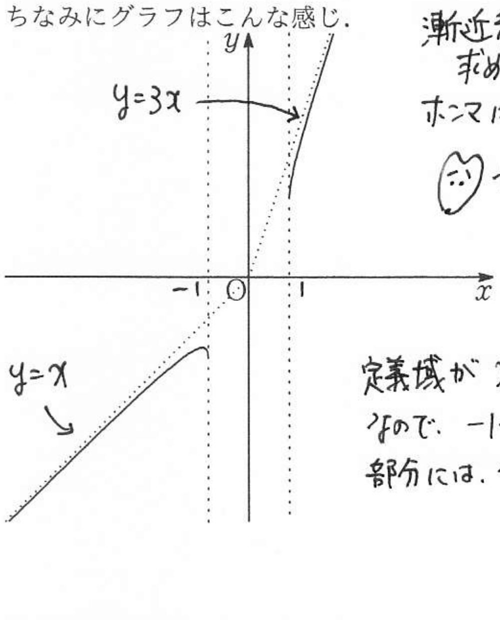
お決まりの手法ばかり

したがって，$y=2x+\sqrt{x^2-1}$ の $x\longrightarrow-\infty$ における漸近線は $y=x$ である．

もう大丈夫．

■

ちなみにグラフはこんな感じ．



漸近線を求めるのってホンマに大変やなあ

やりたくないよー

定義域が $x\leqq-1,\ 1\leqq x$ なので．$-1<x<1$ の部分には．何もありません