双曲線の漸近線は，なぜそれになるのか

そんなこと考えたこともなかったよ

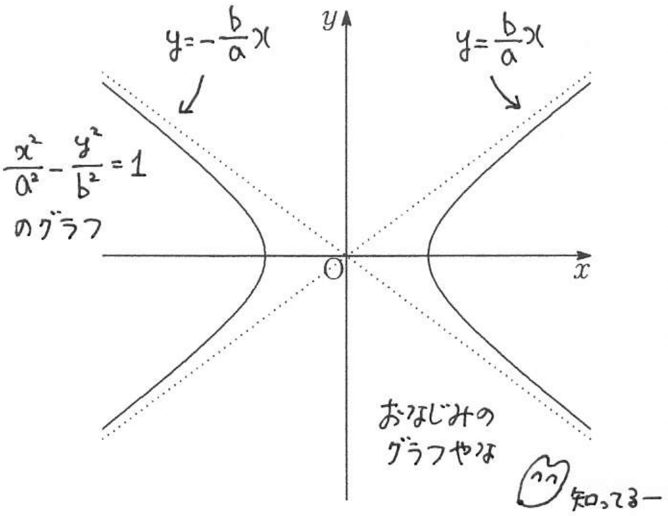
しらーん

以下，$a>0$，$b>0$ とします．

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は2本の漸近線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と $y=-\dfrac{b}{a}x$ もつことは，すでによく知っていると思います．

▷Point◁（双曲線の漸近線）

> 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ である．



入試で出題される漸近線がらみの問題は，たいてい双曲線が絡んでいます．双曲線の漸近線について検証してみよう．

『漸近線のヒミツ』のプリントでも紹介したように，漸近線は次のように定義されます．

▷Point◁（漸近線の定義）

> $y=f(x)$ の $x\longrightarrow\infty$ における漸近線が $y=mx+n$ である．
>
> $\iff \displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ が成立する
>
> 同様に，$x\longrightarrow-\infty$ における漸近線の場合は，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ を考える．

教科書では，『極限』の考え方を学ぶ前に双曲線について学ぶので，漸近線についての考察も曖昧なままでした（各自で教科書の記載内容を確認してみてください．驚くと思いますよ）．

今回は，この漸近線の定義に基づいて，キチッと完璧に求めてみたいと思います．

別にええけど…

うーん

なお，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

なので，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ について考えることにします．言うまでも無く，この関数は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の x 軸よりも上の部分を表しています．

> **例題**
>
> 関数 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ の漸近線を求めよ．

解　$\boxed{x\longrightarrow\infty \text{ における漸近線}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots①$$

をみたすような m，n を求める．

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-(mx+n)\right\}\\&=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)\end{aligned}$$

なので，これが0に収束するためには，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m\right)=0$$

よって，

$$\begin{aligned}m&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)=\frac{b}{a}\end{aligned}$$

このとき，n は，①に $m=\dfrac{b}{a}$ を代入して，

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\left(\frac{b}{a}x+n\right)\right\}=0$$

より，

有理化してます

$$\begin{aligned}n&=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0\end{aligned}$$

計算そのものは特に問題ないね

う、うん…

したがって，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ の $x\longrightarrow\infty$ における漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$ である．

$\boxed{x\longrightarrow-\infty\text{ における漸近線}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-(mx+n)\right\}=0 \quad \cdots②$$

をみたすような m，n を求める．

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-(mx+n)\right\}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)$$

なので，これが 0 に収束するためには，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

であることが必要．$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{x}=0$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-m\right)=0$$

よって，

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{-t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{b}{a}\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}}\right)=-\frac{b}{a}$$

言うまでもなく $x=-t$ と変数変換しています。

OK いつもとおり

このとき，n は，② に $m=-\dfrac{b}{a}$ を代入して，

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\left(-\frac{b}{a}x+n\right)\right\}=0$$

より，

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{a}(\sqrt{t^2-a^2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{a}\frac{(\sqrt{t^2-a^2}-t)(\sqrt{t^2-a^2}+t)}{\sqrt{t^2-a^2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{a}\frac{-a^2}{\sqrt{t^2-a^2}+t}=0$$

ここでもやっぱり有理化

これも定番

したがって，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ の $x\longrightarrow-\infty$ における漸近線は $y=-\dfrac{b}{a}$ である．

■

やっと終わった　あーしんどかった

もうやりたくない…

以上の考察により，ようやく双曲線の漸近線が解明されました．

最初に述べたように，入試で登場する漸近線に関する問題は双曲線が絡んでくることが非常に多いのです．それを実感するのが次の関数の漸近線です．

(1)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(2)　$y=2x+\sqrt{x^2-1}$

見覚えあるぞ…

前回のプリント『こんな問題は，やらなくていいよ』で紹介した問題です．ウンザリする計算をして漸近線を求めましたが，式の内部に双曲線の式が隠れていることを見抜けば一瞬で答えが分かります．

ジーッと見つめる

マジで？

(1) の場合，分母部分が双曲線の式です．分母部分 $\sqrt{x^2+1}=y$ として変形すると，$x^2-y^2=-1$ となるからです．この双曲線の漸近線は $y=\pm x$．つまり，$\sqrt{x^2+1}\longrightarrow\pm x$ ということだから，

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\longrightarrow y=\frac{x}{\pm x}$$

と考えられ，$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ の漸近線が $y=\pm1$ になることが予想できます．

フムフム

(2) も同様に，式の後半部分が双曲線の式です．後半部分 $\sqrt{x^2-1}=y$ として式変形すると，$x^2-y^2=1$ となるからです．この双曲線の漸近線は $y=\pm x$．つまり，$\sqrt{x^2-1}\longrightarrow\pm x$ ということだから，

$$y=2x+\sqrt{x^2-1}\longrightarrow y=2x\pm x$$

と考えられ，$y=2x+\sqrt{x^2-1}$ の漸近線が，$y=3x$ と $y=x$ になることが予想されます．

驚くべきことに，実際にこれらの予想が正しいのです！

これはスゴイ

しかし，テストで「漸近線を求めよ」と問われたときに上のような解答をすると確実に減点（ひどければ ×）になると思うので，避けたほうが良いでしょう．あくまでも検算用として覚えておいてください．でも，パッと式を見たときに「双曲線の式が含まれているから，きっと漸近線があるはずだ」と考えるのは賢明な思考方法だと思います．

ナルホドー

数学っておもしろいネ

注　実際問題として大学入試で「漸近線を求めよ」という問題はまず出題されません．だから，あんまり深刻にならなくていいですよ．

よかったー安心した