複素数の3つの顔

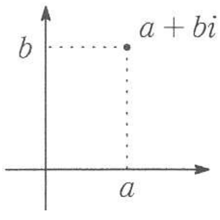
3つの顔

わーい　イヤ〜　ねる〜

複素数計算の図形的な意味について考えよう．複素数には，「点」「ベクトル」「変換」という 3 つの顔があります．この 3 つの顔をうまく使い分けて考えることがポイントです．

1　はじめに

複素平面とは複素数 $a+bi$ を点 $(a,\ b)$ に対応させることにより複素数全体を平面全体として表現したものです．



それだけのことか〜

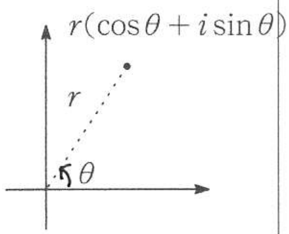
フムフム

$$\text{複素数 } a+bi \longleftrightarrow \text{点 } (a,\ b)$$

複素数を平面上の 1 つの「点」として扱うのです．

しかし，これだけでは不十分で，さらに，極形式という表し方を導入することで複素数の図形的な意味がぐっと広がります．これら 2 つの表し方を状況に応じて使い分けるのです．

極形式とは，大きさ r と実軸とのなす角 θ(偏角という) に注目して $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表す方法です．



例えば，$\alpha=1+\sqrt{3}i$ は実部が 1，虚部が $\sqrt{3}$ の複素数 (つまり座標 $(1,\ \sqrt{3})$ の位置にある「点」) ですが，$|\alpha|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ なので

$$\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と表せば，複素数 α は「偏角 $\frac{\pi}{3}$ で，大きさ 2 の場所にある点」とも読み取れます．

また，この表示にはもう 1 つの意味が込められています．それは

$$\text{原点中心に } +\frac{\pi}{3} \text{ 回転して，2 倍拡大する}$$

という「変換」としての意味です．この「変換」の考え方がとても重要です (後ほど説明します)．

以上の事柄に注意して，四則演算の図形的な意味について考えていこう．

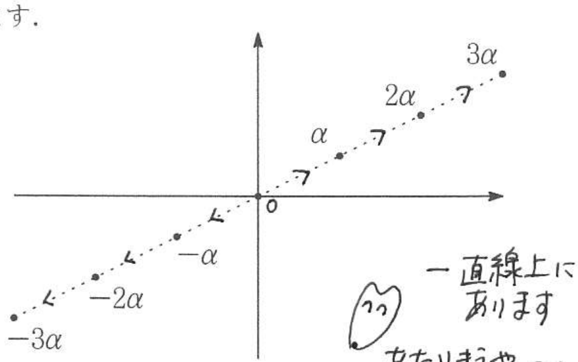
はーい

2　実数倍

複素数を実数倍するとどのようになるのか考えよう．例えば $\alpha=2+i$ のとき，

$$\begin{array}{rcccl}
-3\alpha & = & -6-3i & \longrightarrow & \text{点}(-6,\ -3)\\
-2\alpha & = & -4-2i & \longrightarrow & \text{点}(-4,\ -2)\\
-\alpha & = & -2-i & \longrightarrow & \text{点}(-2,\ -1)\\
0\alpha & = & 0+0i & \longrightarrow & \text{点}(0,\ 0)\\
\alpha & = & 2+i & \longrightarrow & \text{点}(2,\ 1)\\
2\alpha & = & 4+2i & \longrightarrow & \text{点}(4,\ 2)\\
3\alpha & = & 6+3i & \longrightarrow & \text{点}(6,\ 3)
\end{array}$$

となるので，複素平面上に図示すると下のようになります．



一直線上にあります

あたりまえや〜

つまり，

▷Point◁

> 複素数 α に実数 k をかけると，原点を中心とした k 倍拡大になる．

「ベクトル」と同じようなイメージですね．

OK

ナットク

3　和と差

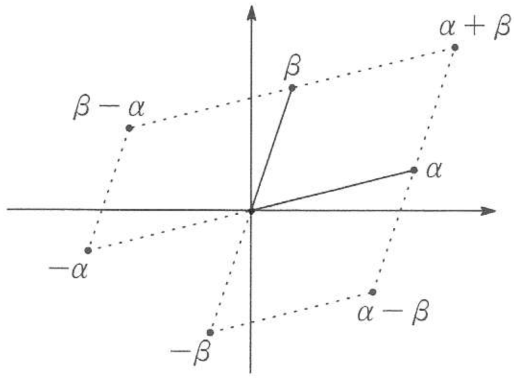
2 つの複素数 α と β の和 $\alpha+\beta$ や差 $\alpha-\beta$ の図形的な意味を考えよう．

例えば $\alpha=4+i,\ \beta=1+3i$ のとき，

$$\alpha+\beta=(4+i)+(1+3i)=(4+1)+(1+3)i=5+4i$$

$$\alpha-\beta=(4+i)-(1+3i)=(4-1)+(1-3)i=3-2i$$

となるので，複素平面上に図示すると下のようになります (ついでに $\beta-\alpha$ も図示しています)．



▷Point◁

複素数の和や差は，ベクトルの和や差とほとんど同じである．

ホンマや〜

注 複素数とベクトルは全く同じというわけではありません．ベクトルは「向き」と「大きさ」をもつモノでしたが，複素数は単なる「点」です．複素数の実数倍，和や差がベクトルのようにみなせるというだけのことです．

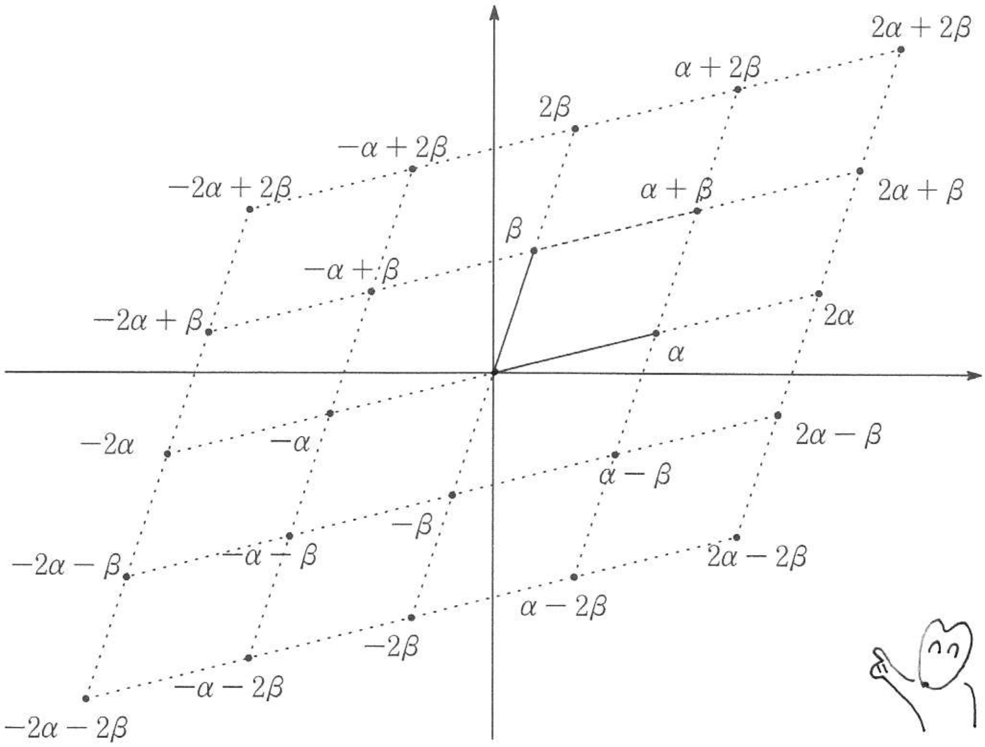
つまり，点 A に複素数 α，点 B に複素数 β を対応させると，

$$\alpha+\beta \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\alpha-\beta \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

うまいこと対応してるなあ

みなすことができるのです．このイメージはとても大切です．



このイメージはとても大切だな.

4　積と商

複素数の和や差は，複素数を「ベクトル」と考えるとイメージしやすかったですが，積や商では複素数を「変換」と考えることが基本です．ここでは，複素数を全て「極形式」で考えます．

まず，純粋な計算問題をしよう．$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，積 $\alpha\beta$ と商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を計算しよう (メンドウですが必ず自力でやってください．加法定理を使うだけです)．

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$