$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}
\end{aligned}
$$

z_1z_2 の偏角が，z_1 の偏角と z_2 の偏角の和に，$\dfrac{z_1}{z_2}$ の偏角が，z_1 の偏角と z_2 の偏角の差になっていることに注目しよう．

以上の結果から，次の重要事実がわかります

▷Point◁

> $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき ($r \geqq 0$)，
> z に α をかける
> $\longrightarrow$ z を原点中心に $+\theta$ 回転して r 倍
> z を α で割る
> $\longrightarrow$ z を原点中心に $-\theta$ 回転して $\dfrac{1}{r}$ 倍．

つまり，複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ 自体に「原点中心，$+\theta$ 回転」という「変換」としての意味が備わっているのです．

よって，先ほども紹介したように，例えば，

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

という複素数は「原点中心に $+\dfrac{\pi}{3}$ 回転して，2 倍拡大する」という「変換」としての意味をもっています．

また，例えば，$\beta = i$ という複素数は，

$$\beta = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

なので，単なる「原点中心に $+\dfrac{\pi}{2}$ 回転」という意味です (「拡大」なし)．

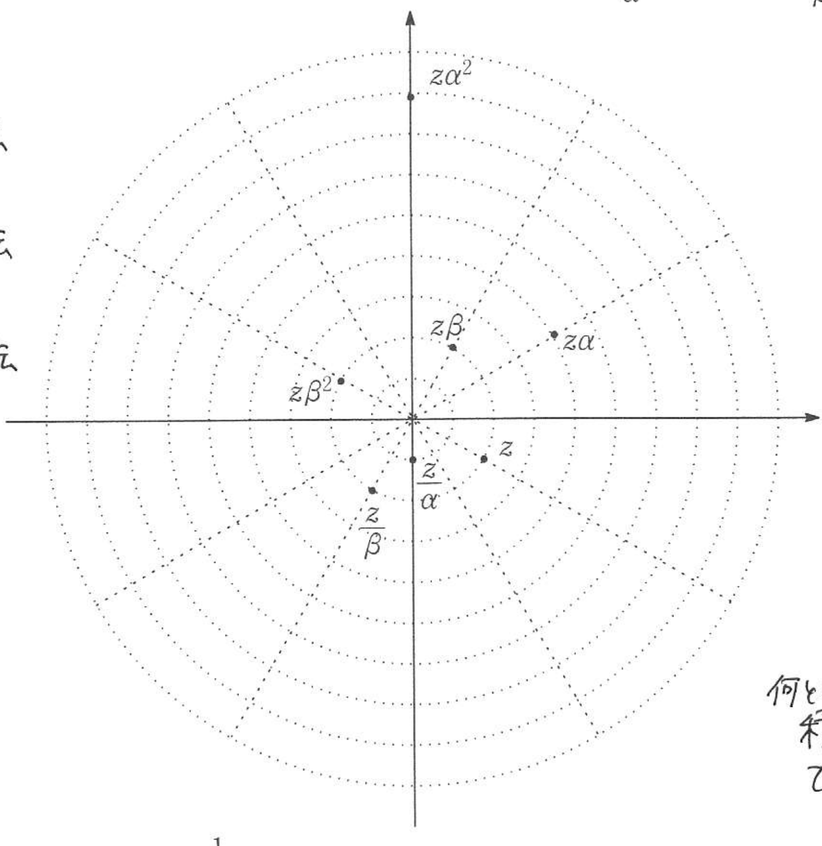
このように，複素数を極形式で表すことによって，その複素数の持つ「変換」としての意味をあぶりだすことができます．

上の，α，β の場合に，下の図で点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，$z\alpha$，$z\alpha^2$，$\dfrac{z}{\alpha}$，$z\beta$，$z\beta^2$，$\dfrac{z}{\beta}$ を図示してみよう．

$\dfrac{z}{\beta}$
$\uparrow$ $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転
z
$\downarrow$ $+\dfrac{\pi}{2}$ 回転
$z\beta$
$\downarrow$ $+\dfrac{\pi}{2}$ 回転
$z\beta^2$

それぞれの点の位置をcheckしよう

OK～



$\dfrac{z}{\alpha}$
$\uparrow$ $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転して $\dfrac{1}{2}$ 倍
z
$\downarrow$ $+\dfrac{\pi}{3}$ 回転して 2倍
$z\alpha$
$\downarrow$ $+\dfrac{\pi}{3}$ 回転して 2倍
$z\alpha^2$

それぞれの点の位置をcheckしよう

OK～

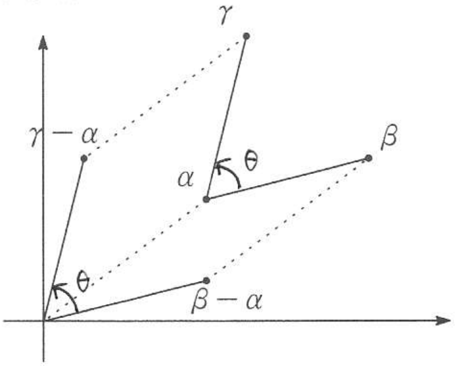
何となく積と商のイメージができたぞ

うん

➾注　$\beta^4 = 1$ なので $\beta^3 = \dfrac{1}{\beta}$．つまり β で 3 回変換することと 1 回逆変換することは同じです．

例題 1.　$\alpha = 3 - i$, $\beta = 2 + 3i$ とする．点 β を点 α を中心として，$\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させたときの点を表す複素数 γ を求めよ．

考え方　$\dfrac{\pi}{6}$ 回転を表す複素数は $\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ ですが，これはあくまでも原点中心なので，今回の場合，いきなり使うことはできません．本問のように回転の中心が原点でない場合は，回転の中心を原点に平行移動して考えます．それに伴い，全ての点を平行移動します．



大切な考え方
☆
☆
☆

上の図からもわかるように，

「β を α を中心として θ 回転すると γ になる」ということは「$\beta - \alpha$ を原点を中心として θ 回転すると $\gamma - \alpha$ になる」ということに他なりません．

OK

したがって，

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore\ \gamma = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) + \alpha$$

▷Point◁

点 β を点 α を中心として θ 回転した点 γ は，

$$\gamma = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) + \alpha$$

下手に暗記すると危険やで

この公式はそのまま暗記するのではなく，意味を考えてその場で作れるようにしよう．

解　上の公式に当てはめるだけ（途中計算は省略）．

はーい

$$\gamma = \{(2+3i) - (3-i)\}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + (3-i)$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}-3}{4}i$$

■

注　「ベクトル」のイメージで考えると分かりやすいかもしれません．つまり，点 A に複素数 α，点 B に複素数 β，点 C に複素数 γ を対応させ，

$$\beta - \alpha \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

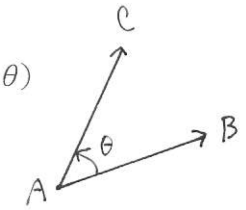
$$\gamma - \alpha \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と考えると，

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

という公式は

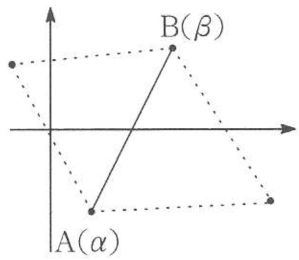
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を θ 回転すると $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ になる



とも解釈できます．このイメージはとても大切です．

例題 2.　複素平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha = 1 - 2i$，$\beta = 3 + 2i$ とするとき，線分 AB を 1 辺とする正三角形の他の頂点 C を表す複素数 γ を求めよ．

考え方　図のように頂点 C は 2 ヶ所考えられます．つまり，点 A を点 B を中心として，$\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点が C です．



解　$\alpha = 1 - 2i$，$\beta = 3 + 2i$，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ を先ほどの公式に代入するだけ（今度は計算式も省略）．

$$\gamma = 2(1 \pm \sqrt{3}) \mp \sqrt{3}i \quad \text{（複号同順）}$$

■

複素数を使わんかったらメチャクチャ大変やでー

複素数ってスゴい

例題 3.　異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に，$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{3}i$ という等式が成り立つとき，3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC はどのような形か．

解　$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{3}i$ より，$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\sqrt{3}i$．この式は，点 B を点 A を中心に 90 度回転して $\sqrt{3}$ 倍拡大した点が点 C であることを意味している．

よって

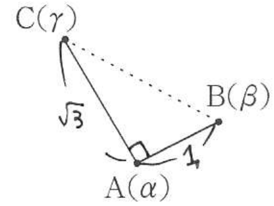
$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$

$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$

$\angle\mathrm{C} = 30^\circ$

である直角三角形．

（辺の比 $1 : 2 : \sqrt{3}$）



■

オモロ〜