図形問題を複素数で解く

これがメイン
これがやりたかったの

複素数計算に図形的な意味があることが分かりましたが，今度は，逆に図形問題に複素数計算を当てはめてみよう．そうすることで様々な図形問題が複素数を用いて，簡単に解くことができます．

全ての問題に共通することは，複素数を「ベクトル」「変換」とみなす考え方で，次の公式が大活躍します（詳細は前回の犬プリを参照のこと）．

丸暗記ではなく意味を考えること

▷Point◁

点 α を中心として点 β を θ 回転した点 γ は，

$$\gamma = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) + \alpha$$

1　正三角形と正方形

正三角形や正方形になることの証明は，複素平面ではズバリ「回転」で一発終了です．

フムフム

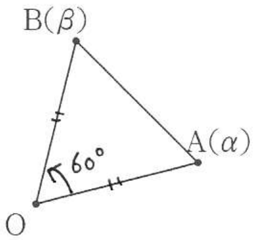
$\boxed{\text{例題}}$ **1**

複素数平面上の異なる 3 点 O(0), A(α), B(β) について，等式

$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$$

が成り立つとき，三角形 OAB は正三角形となることを証明せよ．

$\boxed{\text{考え方}}$ △OAB が正三角形ということは，点 A を原点中心に 60° 回転したとき点 B に重なればよく，つまり，



$\beta = \alpha(\cos 60° + i\sin 60°)$

と表せることを示せばよいのです．

解　$\alpha \neq 0$ なので，$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ より，

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

この変形がポイントやな

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

ゆえに，$\beta = \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$.

したがって，点 B は点 A を原点中心として，$\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である．

よって，△OAB は正三角形である．

■

$\boxed{\text{例題}}$ **2**

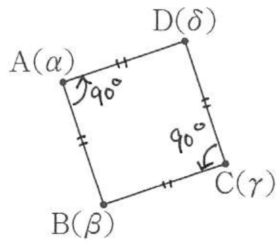
複素数平面上の異なる 4 点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) について，等式

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \quad \cdots ①$$

$$\delta - \alpha = i(\beta - \alpha) \quad \cdots ②$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は正方形となることを証明せよ．

$\boxed{\text{考え方}}$ 正方形であることの証明も，先ほどの正三角形の証明と本質的に同じです．つまり，



A を中心に B を 90° 回転をすれば D に，
C を中心に D を 90° 回転をすれば B に，
それぞれ一致することを示せばよいのです．

そりゃそうや

解　② より，この式は点 B を，点 A を中心に 90° 回転すれば点 D に一致することを意味している．

また，① より，$\alpha = \beta + \delta - \gamma$.

② に代入して，

$\delta - (\beta + \delta - \gamma) = i(\beta - (\beta + \delta - \gamma))$

$\gamma - \beta = i(\gamma - \delta)$.　　$\therefore\ \beta - \gamma = i(\delta - \gamma)$

この式は点 D を，点 C を中心に 90° 回転すれば点 B に一致することを意味している．

よって，以上より，四角形 ABCD は正方形である．

■

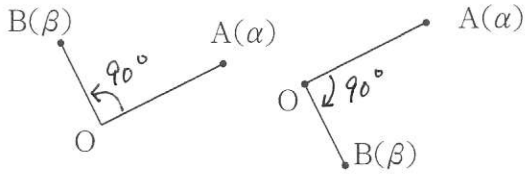
注　① より，$\alpha - \beta = \delta - \gamma$ とすれば，四角形 ABCD が平行四辺形であることがわかるので，このことを利用してもかまいません．

①の式はそういう見方もあるんですね〜

2　垂直・一直線上

垂直や一直線上にあることにも複素数が使えます．ただし，一歩踏み込んで複素数の性質を考えないといけないので注意が必要です．

> **例題 3**
> 複素数平面上の異なる 3 点 O(0), A(α), B(β) について，OA $\perp$ OB であるとき，等式
>
> $$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$$
>
> が成り立つことを証明せよ．



考え方 「OA $\perp$ OB」を複素数の言葉でどう言い換えるのかがポイントです．次のように考えます．

あたりまえ~

OA $\perp$ OB $\Longleftrightarrow$ A を原点中心に $\pm 90°$ 回転して拡大縮小すれば B に一致する

うん

つまり，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が「$\pm 90°$ 回転して拡大縮小を表す複素数」つまり「$\pm bi$ という複素数」であればよく，このことはつまり，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が純虚数であることに他なりません．よって，証明すべきことは

$$\frac{\beta}{\alpha}\text{が純虚数} \Longrightarrow \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$$

となれば，複素数が純虚数であるとはどういうことなのか，を知っていなければなりません．

大切!!

複素数 z が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=-z$ かつ $z \neq 0$

証明 $z=x+iy$ とするとき，$\overline{z}=x-iy$ なので，$z+\overline{z}=2x$．よって，$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$．$z$ が純虚数になるとき実部 $x=0$ なので，$z+\overline{z}=0$ より $\overline{z}=-z$ が成立する．■

証明も大切

以上のことを踏まえて，問題を解こう．

解 OA $\perp$ OB のとき，点 A を O を中心に $\pm 90°$ 回転して拡大縮小した点が B なので，$\beta=\alpha\times(\pm bi)$ となる (b は実数)．

つまり，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\pm bi$．

このことは，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が純虚数であることを意味している．よって，$\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ が成立する．

これが純虚数の条件 $\dfrac{\beta}{\alpha}\neq 0$ もあった方がいいかな．

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}+\frac{\beta}{\alpha}=0. \quad \therefore \ \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0.$$

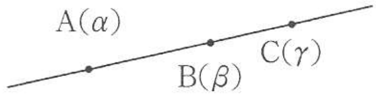
■

注 逆の内容

$$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0 \Longrightarrow \text{OA} \perp \text{OB}$$

も証明できるようにしておこう．まっ，上の証明の逆をたどるだけなんですけど．

> **例題 4**
> 複素数平面上の異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) が一直線上にあるとき，等式
>
> $$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$
>
> が成り立つことを証明せよ．



考え方 「3 点 A, B, C が一直線上にある」を複素数の言葉でどう言い換えるのかがポイントです．次のように考えます．

3 点 A, B, C が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ A を中心に B を拡大縮小すれば C に一致する

これもあたりまえ

つまり，A を原点に平行移動して考えたとき，$\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ (k は実数)．つまり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることに他なりません．

よって，証明すべきことは

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\text{が実数} \Longrightarrow \overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$

です．となれば，複素数が実数であるとはどういうことなのか，を知っていなければなりません．

複素数 z が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z$

大切!!

証明 $z=x+iy$ とするとき，$\overline{z}=x-iy$ なので，$z-\overline{z}=2yi$．よって，$y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$．$z$ が実数になるとき虚部 $y=0$ なので，$z-\overline{z}=0$ より $\overline{z}=z$．■

証明も大切