以上のことを踏まえて，問題を解こう．

解　3 点 A, B, C が一直線上にあるとき，A を中心に B を拡大縮小すれば C に一致する，つまり，

$$\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)\quad(k\text{ は実数})$$

が成立する．このことは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることを意味している．よって，

$$\overline{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

これが実数の条件

が成立する．このとき，

$$\frac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})(\gamma-\alpha)=(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)$$

展開して整理すると

$$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$

が得られる．

■

注　逆の内容

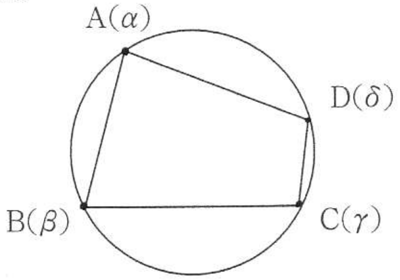
$$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$
$$\Longrightarrow 3\text{ 点 }\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma)\text{ が一直線上にある}$$

も証明できるようにしておこう．まっ，上の証明の逆をたどるだけなんですけど．

3　円に内接する四角形

例題 5

下図のように，4 点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) を頂点とする四角形 ABCD が円に内接しているとき，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数であることを証明せよ



考え方　そもそも 4 点が同一円周上に存在することの条件はたいてい次の 2 つのどちらかです．

・円周角が等しい (∠ACB = ∠ADB)

・向かい合う角の和が 180°(∠A + ∠D = 180°)

OK

複素数で証明するにはどちらを利用するのか，利用するとすればどのように表現すればよいのか，がポイントです．

解　四角形 ABCD が円に内接しているとき，円周角の定理より，∠ACB = ∠ADB である．この角を θ とおく．

このとき，C を中心として A を θ 回転して拡大縮小すれば B に重なるので

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r\text{ は実数})\ \cdots①$$

また，D を中心として A を θ 回転して拡大縮小しても B に重なるので

$$\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=k(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(k\text{ は実数})\ \cdots②$$

① ÷ ② より，

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=\frac{r}{k}=\text{実数}$$

できた〜

■

4　その他の図形問題 (応用)

例題 6

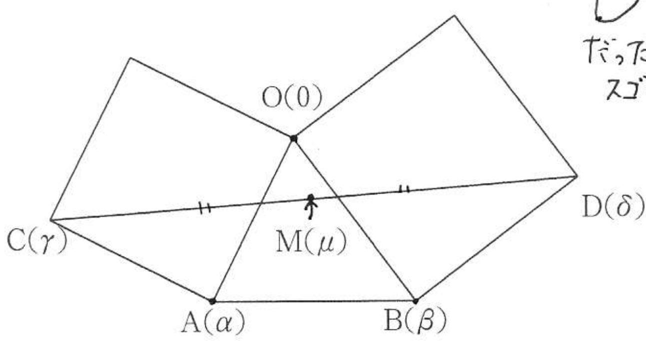
複素平面上で 3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする △OAB の外側に，図のように，OA, OB を一辺とする正方形を 2 つ作る．2 点 C(γ), D(δ) を結ぶ線分の中点を M(μ) とするとき，次のことを示せ．

(1) $\gamma=(1-i)\alpha,\ \delta=(1+i)\beta$

(2) △MAB は直角二等辺三角形である．

こんな問題も複素数で解けるの？

だったらスゴイ



考え方 (1) は $\angle AOC = \angle BOD = 45°$ であることから明らかです．

(2) は，M を中心に A を $90°$ 回転させて B に一致することを示せばよいのです．

解 (1) 正方形であることより，

A を O を中心に $-45°$ 回転し，$\sqrt{2}$ 倍拡大すれば C に重なるので

$$\gamma = \alpha \times \sqrt{2}(\cos(-45°) + i\sin(-45°)) = (1-i)\alpha$$

B を O を中心に $45°$ 回転し，$\sqrt{2}$ 倍拡大すれば D に重なるので

$$\delta = \beta \times \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°) = (1+i)\beta$$

(2) M を中心に A を $90°$ 回転させると，

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha - \frac{\gamma+\delta}{2}\right) \times i + \frac{\gamma+\delta}{2} \\
&= i\alpha + (1-i)\frac{\gamma+\delta}{2} \\
&= i\alpha + (1-i)\frac{(1-i)\alpha + (1+i)\beta}{2} \\
&= i\alpha + \frac{(1-i)^2\alpha + (1+i)(1-i)\beta}{2} \\
&= i\alpha + \frac{(-2i)\alpha + 2\beta}{2} \\
&= i\alpha - i\alpha + \beta \\
&= \beta
\end{aligned}$$

よって，M を中心に A を $90°$ 回転させると B に一致するので，$\triangle MAB$ は直角二等辺三角形である．

■

最後に面白い問題を紹介しよう．こんな問題が出題されてたなんて信じられません．

例題 7

ある青年が，曽祖父の遺品の中から，宝物を埋めてある場所を書いた紙片を見つけた．

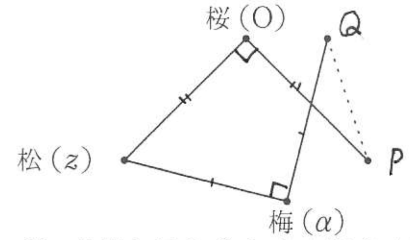
「広大な草原に桜の木と梅の木を松の木が 1 本ずつさびしく立っている．松から桜に向かって歩数を数えながら歩け．桜の木に着いたら右へ 90 度向きを変え，さらに同じ歩数だけ歩け．そしてそこに棒を立てよ．また，松から梅に向かって歩数を数えながら歩け．梅の木に着いたら左へ 90 度向きを変え，さらに同じ歩数だけ歩け．そこにも棒を立てよ．2 本の棒の中間点に宝が埋めてある.」

こんな問題ばかりやったら楽しいのに…

青年が草原に出てみると，松の木は松食い虫に枯らされたか，跡形もなかった．青年は宝探しをあきらめた．この青年に代わって宝のありかをつきとめてもらいたい．

[1983 年自治医大]

考え方 松の位置が分からなくても宝のありかが分かる，つまり松の位置に関わらず，宝のありかが確定することを示せばよいのです．



解 桜の位置を原点 O とする複素平面上で考える．梅，松の位置を表す複素数を α，z とする．

上図のように 2 本の棒を P，Q とすると，P と Q の位置を表す複素数は

P : iz　　　Q : $\alpha + \frac{1}{i}(z - \alpha)$

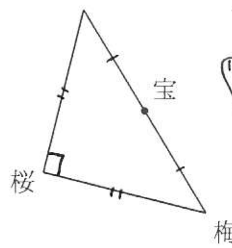
よって，宝のありかを表す複素数を w とすると，$\frac{1}{i} = -i$ なので，

$$w = \frac{1}{2}\left\{iz + \alpha + \frac{1}{i}(z-\alpha)\right\} = \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha)$$

つまり，w は α と $i\alpha$ の中点である．

$i\alpha$ は α を O を中心に 90 度回転した点である．

したがって，宝のありかは，桜の木を中心に梅の木を 90 度回転して得られる地点と梅の木の中間点にある．



ヤッホーイ

見つかった

■

注 複素平面で考えることで，無事に宝のありかをつきとめることができました．便利ですね．それにしても、このような問題が出題されたとき「複素平面でやろう」と思うでしょうか．注目するのは「回転」です．数学全分野の中で「回転」を表現できるのは単位円上の三角関数か複素平面しかありません．単位円の場合は回転の中心が原点だけなので，その点で複素平面の方が応用範囲が広いと思います．

"回転"ときたら複素平面ですね

オモロ～