1994 年後期

正の整数 a，b，c，d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たすとする．

(1) d が 3 の倍数でないならば，a，b，c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ．
(2) d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることを示せ．

考え方　このタイプの問題は，$a^2+b^2=c^2$ という場合でよく出題されますので，解いたことのある人も多いでしょう．基本的にはそれと全く同じ手法になります．

ポイントは，言うまでもなく『平方数の分類』です．

解　まず始めに，平方数 n^2 を 3 で割った余りが 0 か 1 であることを証明しておく．

$n=3k$ のとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2$$

$n=3k\pm1$ のとき

$$n^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2)+1$$

よって，平方数 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

次に，平方数 n^2 を 4 で割った余りが 0 か 1 であることを証明しておく．

$n=2l$ のとき

$$n^2=(2l)^2=4l^2$$

$n=2l+1$ のとき

$$n^2=(2l+1)^2=4l^2+4l+1=4(l^2+l)+1$$

よって，平方数 n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 である．

(1) d が 3 の倍数でないとき，d^2 を 3 で割った余りは 1 である．

a，b，c のうち，

3 の倍数が 0 個のとき，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは，$1+1+1=3$，すなわち，余り 0．

3 の倍数が 1 個のとき，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは，$0+1+1=2$，すなわち，余り 2．

3 の倍数が 2 個のとき，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは，$0+0+1=1$，すなわち，余り 1．

3 の倍数が 3 個のとき，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは，$0+0+0=0$，すなわち，余り 0．

したがって，d が 3 の倍数でないとき，a，b，c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つある．

(2) d が 2 の倍数でないとき，d^2 は奇数であり，4 で割ると 1 余る．

$a^2+b^2+c^2$ が奇数になるのは，a，b，c のうち，「3 個とも奇数」または「1 個が奇数で 2 個が偶数」の場合である．

3 個とも奇数の場合，$a^2+b^2+c^2$ を 4 で割った余りは，$1+1+1=3$，すなわち，余り 3．d^2 を 4 で割った余りが 1 であるので不適．

したがって，a，b，c の中に 2 の倍数がちょうど 2 つある．

(1) の結果を合わせて考えると，d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば，a，b，c のうち，3 の倍数も 2 の倍数もちょうど 2 こずつあるので，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数である

■

▷Point◁

平方数を 3 で割った余りは 0 か 1
平方数を 4 で割った余りは 0 か 1