1995 年前期

正の整数の組 $(m,\ n)$ で条件

$$0 < \left|\frac{n}{m} - 0.4\right| \leqq \frac{1}{100}$$

を満たすもののうち，m が最も小さい $(m,\ n)$ 求めよ．

考え方 問題の意味としては，数直線上で 0.4 を取ったとき，数直線上での距離の差が $\frac{1}{100}$ 以下になる分数のうち，分母が最も小さいものを選べということですが，そんなことを知らなくても大丈夫です (笑).

最初の式変形がポイントになるでしょう．

$$-\frac{1}{100} \leqq \frac{n}{m} - 0.4 \leqq \frac{1}{100}$$

$$\frac{39}{100} \leqq \frac{n}{m} \leqq \frac{41}{100}$$

とする人は多いと思いますが，ここから $\frac{n}{m}$ を探していくのは大変です (少なくとも，もう一つくらい式が必要でしょう)．この式変形は失敗です．

ある程度，しらみつぶし的な作業になりますが，やみくもに調べるのではなく，数学的な根拠に基づいて，うまくやりましょう．

解

$$0 < \left|\frac{n}{m} - \frac{2}{5}\right| \leqq \frac{1}{100}$$

$$0 < \left|\frac{5n-2m}{5m}\right| \leqq \frac{1}{100}$$

$$0 < \frac{|5n-2m|}{5m} \leqq \frac{1}{100}$$

$$\therefore\quad m \geqq 20|5n-2m| \quad \cdots ①$$

ここで，$|5n-2m|$ は 1 以上の整数であるので (✎注)，順番に調べていく．

(i) $|5n-2m| = 1$ のとき

$$m \geqq 20$$

$m = 20$ のとき，$|5n-40| = 1$.

これを満たす n は存在しない．

$m = 21$ のとき，$|5n-42| = 1$.

これを満たす n は存在しない．

$m = 22$ のとき，$|5n-44| = 1$.

これを満たす n は $n = 9$ である．

したがって，$|5n-2m| = 1$ のとき，最も小さい m は $m = 22$ で，このとき，$n = 9$.

(ii) $|5n-2m| \geqq 2$ のとき

$$m \geqq 40$$

であり，(i) で求めた m の最小値 $m = 22$ よりも小さくなることはない．

(i)(ii) より，

$$(m,\ n) = (22,\ 9)$$

■

✎**注** 「$|5n-2m|$ は 1 以上の整数であること」について．

実際，$m = 2,\ n = 1$ のとき，$|5n-2m| = 1$ であり，$|5n-2m|$ 自体が整数なので，「$|5n-2m|$ が 1 以上の整数である」と言っているだけなんですが，もう少し詳しく言うと，$|5n-2m|$ はすべての正の整数を取り得ます．

なぜなら，任意の正の整数 k に対して，$m = 2k$, $n = k$ とすれば，$|5n-2m| = k$ となるからです．つまり，どのような正の整数も $|5n-2m|$ の形で作りだすことができます．