1998 年後期

(1) $\log_5 3$ は無理数であることを示せ.
(2) $\log_{10} r$ が有理数となる有理数 r は $r = 10^q$ ($q = 0,\ \pm1,\ \pm2\ \cdots\cdots$) に限ることを示せ.
(3) 任意の正の整数 n に対して,

$$\log_{10}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$$

は無理数であることを示せ.

考え方　小問全てが「〜を示せ」なのでウンザリしますが, 頑張りましょう.

(1) は有理数だと仮定して矛盾を示します (背理法の典型).

(2) は, まずは $\log_{10} r$ が正か負かで状況が変わってきます. $\log_{10} r > 0$ ならば, 有理数 r は整数になり, さらに $r = 10^m$ であること, $\log_{10} r < 0$ ならば, 有理数 r は (有理数のままで), $r = 10^{-m}$ であること, を示します. 結果はほとんど明らかですが,「当たり前のこと」をきちんと論じるのも大切なことです.

(3) は (1) と (2) の結果を利用しますが, 何が矛盾するのか, なかなか気づきにくいと思います.

解

(1) $\log_5 3$ が有理数であると仮定すると

$$\log_5 3 = \frac{q}{p}\ \ (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおける. このとき,

$$5^{\frac{q}{p}} = 3$$

$$5^q = 3^p$$

左辺は 5 の倍数であるが, 右辺は 5 の倍数でないので矛盾.

(2)

(i) $\log_{10} r > 0$ のとき

$$r = \frac{b}{a}\ \ (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数})$$

$$\log_{10} r = \frac{q}{p}\ \ (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおく. このとき,

$$10^{\frac{q}{p}} = r = \frac{b}{a}$$

$$10^q = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

$$a^p 10^q = b^p$$

a と b が互いに素であるので, $a = 1$ である. よって,

$$10^q = b^p$$

$$2^q 5^q = b^p$$

よって, b の素因数は 2 と 5 しかないから, $b = 2^x 5^y$ とすると,

$$2^q 5^q = 2^{xp} 5^{xq}$$

素因数分解の一意性より

$$q = xp,\ q = yp$$

p と q は互いに素なので,

$$p = 1,\ \ x = y = q$$

$$\therefore\ \ r = 10^q\ (q = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(ii) $\log_{10} r = 0$ のとき

$$r = 10^0$$

(iii) $\log_{10} r < 0$ のとき
$\log_{10} \dfrac{1}{r} > 0$ なので, (i) の結果から,

$$\frac{1}{r} = 10^q\ \ (q = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$r = 10^{-q}\ \ (q = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(i)(ii)(iii) より,

$$r = 10^q\ (q = 0,\ \pm1,\ \pm2\ \cdots\cdots)$$

(3)　$\log_{10}(1+3+3^2+\cdots+3^n)$ が有理数だと仮定すると，(2) より，

$$1+3+3^2+\cdots+3^n=10^q \quad (q \text{ は正の整数})$$

と表すことができる．このとき，

$$\frac{1(1-3^{n+1})}{1-3}=10^q$$

$$2\cdot 10^q=3^{n+1}-1$$

$$3^{n+1}=2\cdot 10^q+1$$

n は正の整数であるから，3^{n+1} は 9 で割り切れる．

しかし，右辺は

$$(\text{右辺})\equiv 2\cdot 1^n+1\equiv 3 \pmod 9$$

なので，9 で割ると 3 余る．よって矛盾．

したがって，任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1+3+3^2+\cdots+3^n)$ は無理数である．

■

✎注　(1) では，両辺が 5 の倍数かどうかで矛盾を示しましたが，「素因数分解の一意性」を用いて，素因数 5(または 3) の個数に注目して矛盾を示してもかまいません．