1999 年前期

p, q は素数で, $p<q$ とする.

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ.

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ.

考え方　実にシンプルな問題で, 結果はほとんど明らかですが, このような問題こそ, 丁寧な解答を心がけるべきです.

整数問題の基本的な考え方の組み合わせで証明できます.

解

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{p+q}{pq}$

まず, $p+q$ と pq は互いに素である.

なぜならば, p, q は素数であるので, pq の素因数は p と q であるが, $p+q$ は p でも p でも割り切れないので, $p+q$ と pq には共通の素因数が存在しない. よって, $p+q$ と pq は互いに素である.

つまり, $\dfrac{p+q}{pq}$ は既約分数である.

したがって, $\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$ となるには

$$p+q=1,\qquad pq=r$$

とならねばならないが, p, q は素数なので矛盾.

よって, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない.

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{q-p}{pq}$

(1) と同様に, $q-p$ と pq は互いに素であるので, $\dfrac{q-p}{pq}$ は既約分数である.

したがって, $\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$ となるには

$$q-p=1,\qquad pq=r$$

とならねばならない。

$q-p=1$(奇数) より, p と q の偶奇性は異なる. 偶数の素数は 2 だけであり, $p<q$ より

$$p=2,\ q=3$$

である.

■

参考　この問題のポイントは「p と q が素数のとき, $p+q$ と pq, $q-p$ と pq がそれぞれ互いに素であること」だったわけですが, p と q が素数でなくとも, p と q が互いに素であれば成立します. つまり,

▷Point◁

a と b が互いに素であれば, $a+b$ と ab は互いに素である.

証明しておきましょう.

解　$a+b$ と ab は互いに素でないと仮定すると, 共通の素因数 p が存在し

$$a+b=p\alpha\ \cdots①$$

$$ab=p\beta\ \cdots①$$

② より, p は素数なので, a または b が p で割り切れる.

いま, a が p で割り切れるとすると, ① より, $b=p\alpha-a$ なので, b も p で割り切れる.

同様にして, b が p で割り切れるとすると, a も p で割り切れることになるので, いずれの場合も, a と b が互いに素であることに矛盾する.

よって, $a+b$ と ab は互いに素である.

■