2003 年後期

n を正の整数とする．

(1) $x^2+y<n^2$ をみたす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n を求めよ．

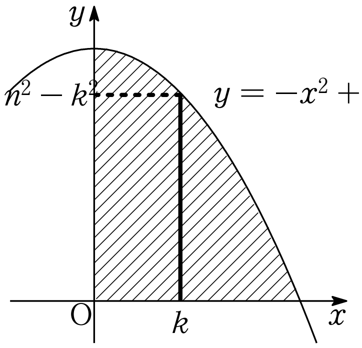
(2) $\sqrt{x^2+y}$ を越えない最大の整数が n であるような正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n を求めよ．

考え方　この問題を整数問題に入れるかどうか迷いました．なぜなら，格子点の問題は，実質的に数列分野の問題だからです．でも，パッと見、整数問題っぽく見えるし，格子点の問題だと気付かない可能性もあるので・・・・

解

(1) $x^2+y<n^2$ より，$y<-x^2+n^2$

求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n は，図の斜線部分 (境界線は含まない) に含まれる格子点の個数に等しい．



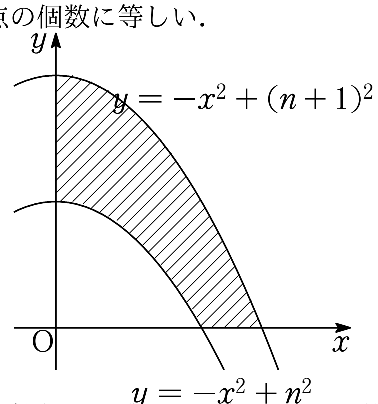
$x=k$ 上の格子点の個数は (境界線を含まないことに注意して)，n^2-k^2-1 個なので，

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2-1) \\ &= (n-1)(n^2-1)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6) \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^2+y}$ を越えない最大の整数が n であることから

$$\begin{aligned} &n \leqq \sqrt{x^2+y} < n+1 \\ &n^2 \leqq x^2+y < (n+1)^2 \\ &-x^2+n^2 \leqq y < -x^2+(n+1)^2 \end{aligned}$$

求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n は，図の斜線部分 ($y=-x^2+n^2$ 上の点は含み，x 軸，y 軸，$y=-x^2+(n+1)^2$ 上の点は含まない) に含まれる格子点の個数に等しい．



この斜線部分に含まれる格子点の個数は

$y<-x^2+(n+1)^2$ $(x>0,\ y>0)$ に含まれる格子点の個数から

$y<-x^2+n^2$ $(x>0,\ y>0)$ に含まれる格子点の個数を引いたものであるので，(1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1}-a_n \\ &= \frac{1}{6}((n+1)-1)(4(n+1)^2+(n+1)-6) \\ &\qquad -\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6) \\ &= (n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

■

注　(2) は絶対に (1) の結果を利用すべきです．もし利用しないで解くなら (例えば，いきなり (2) だけ出題されたりしたら)，次のようになるでしょう．今回の場合，2 曲線の形が同じであること (上下に平行移動しただけ)，2 曲線の x 軸との交点が $x=n$，$x=n+1$ であることから，そんなに面倒なことにはなりません．

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{(n+1)^2-n^2\right\}+(-n^2+(n+1)^2-1)$$

なぜ，この式で求められるのかは各自で考えてください．