2006 年前期

次の条件 (a)，(b) をともにみたす直角三角形を考える．ただし，斜辺の長さを p，その他の 2 辺の長さを q, r とする．

(a) p，q，r は自然数で，そのうち少なくとも 2 つは素数である．
(b) $p+q+r=132$

(1) q，r のどちらかは偶数であることを示せ．
(2) p，q，r の組をすべて求めよ．

考え方 言うまでもなく三平方の定理を考えて

$$p^2=q^2+r^2$$

なので，ド定番の平方数の分類問題です．

(2) は思考力を要する良問です．(1) の結果と「p，q，r のうち少なくとも 2 つは素数である」という事実をうまく活用します．

まず，q，r の偶奇性から

(p,　q,　r)
(偶, 偶, 偶)
(奇, 偶, 奇)
(奇, 奇, 偶)

の組み合わせが考えられますが，(偶, 偶, 偶) は NG です (理由は考えてください)．となれば，(奇, 偶, 奇) か (奇, 奇, 偶) の場合しかありませんね．このうち少なくとも 2 つは素数になるのですが，どれが素数なのでしょうか．偶数の素数は 2 だけであることもヒントです．

なお，(2) は，(1) を全く使わずにも解けます (✎注)．

解

$$\begin{cases} p^2=q^2+r^2 & \cdots\cdots① \\ p+q+r=132 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

(1) まず，平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 であることを示す．

$n=2k$ のとき

$$n^2=(2k)^2=4k^2$$

よって，n^2 は 4 で割り切れる．

$n=2k+1$ のとき

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$$

よって，n^2 は 4 で割ると 1 余る．

以上より，平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 である．

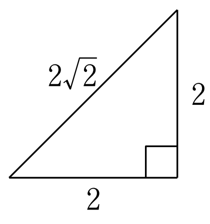
① より，q と r のどちらも奇数だと仮定すると，q^2 も r^2 も 4 で割った余りは 1 なので，q^2+r^2 は 4 で割ると 2 余る．平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 なので，これが p^2 になることはない．

したがって，q と r の少なくとも一方は偶数である．

(2) (1) より，q と r の少なくとも一方は偶数であるので，次のように場合分けして考える．

(i) q も r も偶数のとき

p も偶数になるので，p, q, r は全て偶数である．少なくとも 2 つが素数であり，偶数の素数は 2 しかないので，直角三角形の 3 辺のうち 2 辺の長さが 2 ということになる．



このとき，斜辺の長さは整数ではないので不適である．

(ii) q と r のどちらかが偶数のとき

q が偶数とする．いま，q が素数，つまり $q=2$ とすると

① より，$(p+r)(p-r)=4$

② より，$p+r=130$

よって，$130(p-r)=4$

これを満たす p，r は存在しない．つまり，q が素数になることはないので，p と r が素数になる．

① より，$r^2=(p+q)(p-q)$

r は素数であり，$p+q>0$，$p+q>p-q$ なので

$$p+q=r^2,\quad p-q=1$$

$$p=\frac{r^2+1}{2},\quad q=\frac{r^2-1}{2}$$

したがって，② より

$$\frac{r^2+1}{2}+\frac{r^2-1}{2}+r=132$$

$$r^2+r-132=0$$

$$(r+12)(r-11)=0$$

$r>0$ より，$r=11$

$$p=\frac{11^2+1}{2}=61$$

$$q=\frac{11^2-1}{2}=60$$

r が偶数の場合も同様に考えて (つまり，q と r が逆になるだけ)，

$$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11),(61,\ 11,\ 60)$$

■

✐注　実は (1) を全く利用せずに，(2) だけを単独で解くことも可能です．やってみましょう．

(2) の別解

$$\begin{cases} p^2=q^2+r^2 & \cdots\cdots① \\ p+q+r=132 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② より，$p=132-q-r$

① に代入して

$$(132-q-r)^2=q^2+r^2$$

$$132^2+q^2+r^2-264q+2qr-264r=q^2+r^2$$

$$qr-132q-132r+132\times66=0$$

$$(q-132)(r-132)=132^2-132\times66$$

$$(q-132)(r-132)=132\times66$$

$$(132-q)(132-r)=2^3\times3^2\times11^2$$

$0<132-q<132$，$0<132-r<132$ より，

$132-q$	$2^3\times3^2$	$2^3\times11$	11^2	$3^2\times11$
$132-r$	11^2	$3^2\times11$	$2^3\times3^2$	$2^3\times11$

よって，

q	60	44	11	33
r	11	33	60	44

p，q，r のうち少なくとも 2 つは素数であることから，q，r のうち少なくとも 1 つが素数になるので，

$$(q,\ ,\ r)=(60,\ 11),(11,\ 60)$$

このとき $p=61$ で素数なので適する．よって，

$$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11),(61,\ 11,\ 60)$$

素因数分解 $2^3\times3^2\times11^2$ から，$132-q$ と $132-r$ に分配するところがちょっと難しいですが，なんとかできましたね．