2008 年後期

実数 x に対して，$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を $[x]$ と表す.

(1) $\dfrac{1}{2}([x]-[y])$ が整数となる点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を，xy 平面に図示せよ.

(2) $\dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{y}{3}\right]\right)$ が整数となる点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を，xy 平面に図示せよ.

考え方　領域の図示なので，整数問題の範疇に入れるかどうか迷いましたが，まあ，やってみましょう.

$[x]$ は,「x を超えない最大の整数」を表しています (いわゆる「ガウス記号」と呼ばれるものですが，名前なんてどうでもいいです). 例えば

$$[3.14]=3, \quad [5]=5, \quad [-2.3]=-3$$

などなど. 負の数の場合に注意しましょう. 数直線をイメージすると分かりやすいかもしれません. 数直線上で左側すぐの整数を取ればよいのです.

つまり，$[x]$ は x が何であっても必ず整数になります. ということは，(1) の場合，

$$\frac{1}{2}([x]-[y]) \text{ が整数} \iff [x]-[y] \text{ が偶数}$$

なので

$$[x] \text{ が偶数，かつ，} [y] \text{ が偶数}$$

または

$$[x] \text{ が奇数，かつ，} [y] \text{ が奇数}$$

となります. よって，$[x]$ が偶数になる x の条件は何か，$[x]$ が奇数になる x の条件は何か，を考えることになります.

(2) も同様ですが，(1) の結果を上手く利用する方法もあります (参考)

解

(1)

$$\frac{1}{2}([x]-[y]) \text{ が整数} \iff [x]-[y] \text{ が偶数}$$

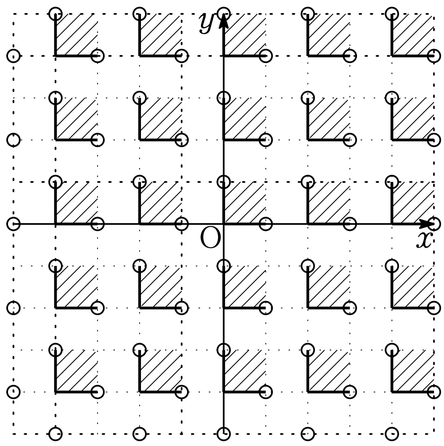
なので，整数 $[x]$ と $[y]$ の偶奇性が一致する.

(i) $[x]$ も $[y]$ も，ともに偶数の時，

$$[x]=2m \iff 2m \leqq x < 2m+1$$

$$[y]=2n \iff 2n \leqq x < 2n+1$$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，下図の通り (1 メモリの幅が 1).

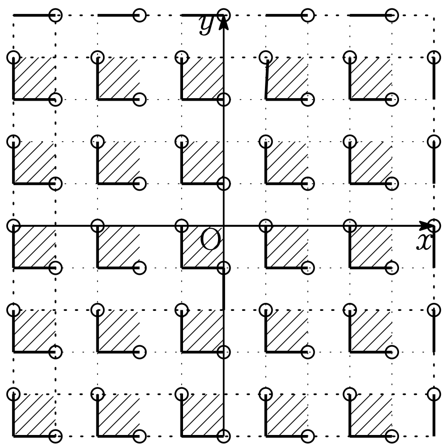


(ii) $[x]$ も $[y]$ も，ともに奇数の時，

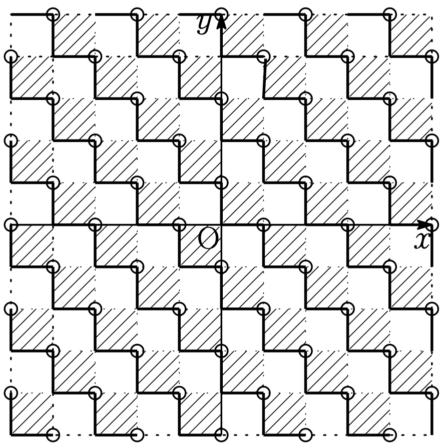
$$[x]=2m+1 \iff 2m+1 \leqq x < 2m+2$$

$$[y]=2n+1 \iff 2n+1 \leqq x < 2n+2$$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，下図の通り (1 メモリの幅が 1).



よって，(i)(ii) を合わせて，もとめる領域は図の斜線部分と太線部分である (白丸のところは含まない).



(2)

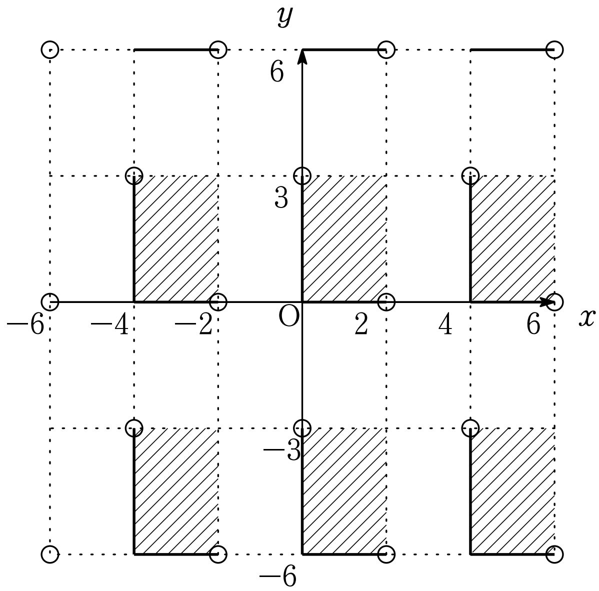
$\dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{y}{3}\right]\right)$ が整数 $\iff$ $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{y}{3}\right]$ が偶数

なので，整数 $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{y}{3}\right]$ の偶奇性が一致する．

(i) $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ も $\left[\dfrac{y}{3}\right]$ も，ともに偶数の時，

$$\left[\frac{x}{2}\right]=2m \iff 2m \leqq \frac{x}{2} < 2m+1$$
$$\iff 4m \leqq x < 4m+2$$
$$\left[\frac{y}{3}\right]=2n \iff 2n \leqq \frac{y}{3} < 2n+1$$
$$\iff 6n \leqq y < 6n+3$$

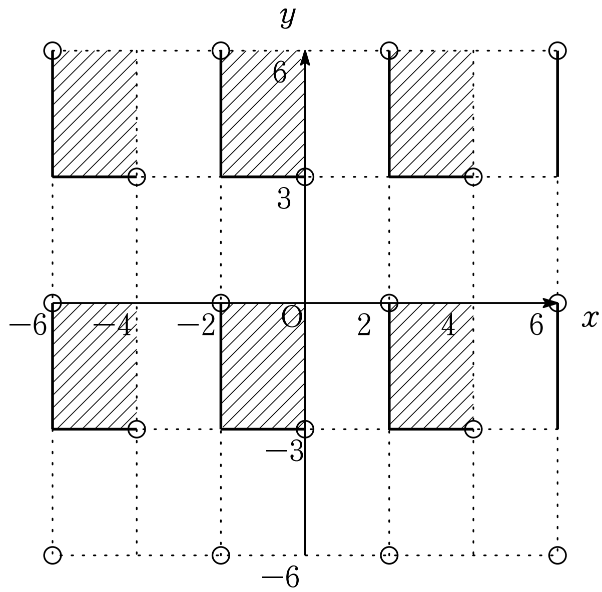
したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，下図の通り．



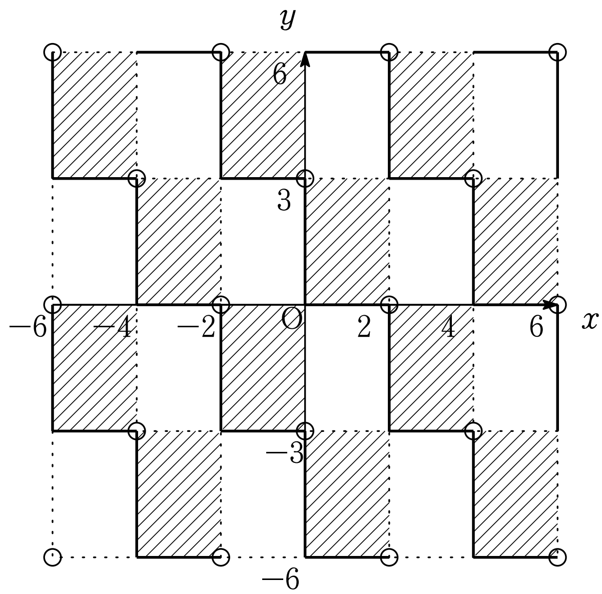
(ii) $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ も $\left[\dfrac{y}{3}\right]$ も，ともに奇数の時，

$$\left[\frac{x}{2}\right]=2m+1 \iff 2m+1 \leqq \frac{x}{2} < 2m+2$$
$$\iff 4m+2 \leqq x < 4m+4$$
$$\left[\frac{y}{3}\right]=2n+1 \iff 2n+1 \leqq \frac{y}{3} < 2n+2$$
$$\iff 6n+3 \leqq y < 6n+6$$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，下図の通り．



よって，(i)(ii) を合わせて，もとめる領域は図の斜線部分と太線部分である (白丸のところは含まない)．



■

注 結局，(1) も (2) 同じような図になりました．

(1) は，整数 $[x]$ と $[y]$ の偶奇性が一致

(2) は，整数 $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{y}{3}\right]$ の偶奇性が一致

　ということは，(2) で，$\dfrac{x}{2}=X$，$\dfrac{y}{3}=Y$ とおくと，点 $(X,\ Y)$ の領域図が (1) と全く同じということになります．

　このとき，$x=2X$，$y=3Y$ ですから，(1) の図を x 軸方向に 2 倍，y 軸方向に 3 倍拡大すれば (2) の図が得られます．これは，軌跡の考え方に基づいています．

　おそらく，出題者はこの考え方を想定していたものと思われますが，まあ，普通にやっても大したことないです．