2009 年後期

$\alpha = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ とおく．すべての自然数 n に対して，$\alpha^n + \beta^n$ は自然数であることを示せ．

考え方 $\alpha^n + \beta^n$ は対称式なので，和 $\alpha + \beta$ と積 $\alpha\beta$ を考えます．3 乗根があるので一瞬ビビるかもしれませんが，見かけ倒しです．和も積も簡単に計算できます．

この 3 乗根の和の問題は割と入試でも出題されるので要注意です．

解 $\alpha = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ より，$\alpha^3 = 7+5\sqrt{2}$, $\beta^3 = 7-5\sqrt{2}$. よって，

$$\alpha^3+\beta^3 = 14, \quad \alpha^3\beta^3 = -1$$

$\alpha+\beta = s$, $\alpha\beta = t$ とおくと

$$s^3 - 3ts = 14, \quad t^3 = -1$$

$t^3 = -1$ より，t は実数なので，$t = -1$

よって，$s^3 + 3s - 14 = 0$ ……$(*)$

$(s-2)(s^2+2s+7) = 0$

s は実数なので，$s = 2$

$$\therefore \ \alpha+\beta = 2, \quad \alpha\beta = -1$$

よって，α, β は，$x^2 - 2x - 1 = 0$ の 2 つの解なので，

$$\alpha = 1+\sqrt{2}, \quad \beta = 1-\sqrt{2}$$

したがって，すべての自然数 n に対して，$\alpha^n + \beta^n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ が自然数になることを数学的帰納法で証明する．

$a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく．

[I] $n = 1$, 2 のとき

$a_1 = \alpha+\beta = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$

$a_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\quad = 2^2 - 2(-1) = 6$

いずれも自然数であるので，$n = 1$, 2 のとき成立する．

[II] $n = k$, $k+1$ のとき成立すると仮定する

$$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2} = (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$

より

$$a_{k+1} = 2a_{k+1} + a_k$$

したがって，a_k と a_{k+1} が自然数ならば，a_{k+2} も自然数になる．

よって，$n = k+2$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注 いわゆる，2 つを仮定する変則的数学的帰納法の典型です．類題を解いた経験があるでしょう．$n = k+2$ のときを考えるには，$n = k$, $k+1$ の 2 つの情報が必要であることに自分で気づくことが重要です．

注 上の解答では，数学的帰納法を用いて証明しましたが，使わなくても証明できます．

二項定理より

$$(1+a)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 a + {}_n\mathrm{C}_2 a^2 + {}_n\mathrm{C}_3 a^3 + {}_n\mathrm{C}_4 a^4 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n a^n$$

a の代わりに $-a$ を代入すると (奇数乗の項の符号が $-$ に代わる)

$$(1-a)^n = 1 - {}_n\mathrm{C}_1 a + {}_n\mathrm{C}_2 a^2 - {}_n\mathrm{C}_3 a^3 + {}_n\mathrm{C}_4 a^4 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n (-a)^n$$

辺々を加えて

$$\therefore \ (1+a)^n + (1-a)^n = 2 + 2({}_n\mathrm{C}_2 a^2 + {}_n\mathrm{C}_4 a^4 + \cdots\cdots) \quad ※偶数乗のみの和$$

$$= 2 + 2a^2({}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 a^2 + \cdots\cdots)$$

ここで $a=\sqrt{2}$ とした場合が a_n であり，このとき，$2a^2=4$ なので，a_n は自然数である．

注 a_n は自然数ですが，もう少し分析すると，「4 で割ると 2 余る自然数」ということになります．

参考 最初，α と β は 3 乗根の形で書かれてましたが，結局，$\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ だったわけです．確かに，3 乗すると

$$(1\pm\sqrt{2})^3=7\pm 5\sqrt{2}$$

になっているので (各自で確認してください)，$\sqrt[3]{7\pm 5\sqrt{2}}=1\pm\sqrt{2}$ です．「だったら，最初からこう書けよ．なんでわざわざ 3 乗根なんかで表記するねん」って，ツッコミたくなりますが，実は深い理由があります．

それは，「3 次方程式の解の公式」です．

式 (*) を見て下さい．3 次方程式 $X^3+3X-14=0$ の実数解が $X=s(=\alpha+\beta)$ です．**解** では，この 3 次方程式が因数分解できたので，$s=2$ と確定しました．

では，この 3 次方程式を因数分解ではなく，解の公式で解いてみましょう．

一般に (2 次の項がない最高時の係数が 1 の)3 次方程式 $X^3+pX+q=0$ の 3 つの解 x_1，x_2，x_3 は

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$x_2=-\omega\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$x_3=-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\omega\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

であることが知られています．恐ろしい公式ですね．2 乗の項がない場合ですらこの有様ですから，一般の 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の場合はもっとエゲツナイ式になります．

ここで，今回，$p=3$，$q=-14$ なので当てはめてみます．

3 次方程式 $X^3+3X-14=0$ の (唯一の) 実数解が x_1 なので，x_1 を計算します．

$$\begin{aligned}
x_1&=-\sqrt[3]{\frac{-14+\sqrt{(-14)^2+\frac{4\cdot 3^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-14-\sqrt{(-14)^2+\frac{4\cdot 3^3}{27}}}{2}}\\
&=-\sqrt[3]{\frac{-14+\sqrt{196+4}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-14-\sqrt{196+4}}{2}}\\
&=-\sqrt[3]{\frac{-14+10\sqrt{2}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-14-10\sqrt{2}}{2}}\\
&=-\sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{-7-5\sqrt{2}}\\
&=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

問題文の最初の設定と同じ 3 乗根が登場しました！まさに，このことだったんですね．この 3 乗根の和が，実は 2 に等しかった，というのが今回の問題のテーマだったのです．

さて，3 次方程式の解の公式は便利ではありますが，機械的に当てはめると，実はシンプルな実数解なのに，3 乗根やら虚数やらが登場する非常にメンドクサイ形になっています．しかし，これはこれで正しいわ

けで，何ともしっくりこない感が否めません．この「しっくりこない感」が虚数 (i) 誕生の一つの動機にもなっています．

興味ある人は，3 次方程式の解の公式，虚数の誕生，などで調べてみてください．