2017 年後期

m，n を 1 以上 10 以下の整数とする．3 点 O(0，0)，A(3，4)，B(m，n) は同一直線上にないとする．

(1) △OAB の面積を最小にする B(m，n) を求めよ．
(2) ∠AOB を最小にする B(m，n) を求めよ．

考え方　(1) は特に問題ないでしょう．
(2) ですが，なんとなく，∠AOB を最小にする B(m，n) は，(1) の △OAB の面積を最小にする B(m，n) のいずれかのような気がしませんかね (笑)．そのことを示せば良いのです．

解
(1) △OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|3n-4m|$$

m，n を 1 以上 10 以下の整数だから，S が最小になるのは，$|3n-4m|=1$，すなわち，$3n-4m=\pm1$ のときである．

(i) $3n-4m=1$ のとき
$n=3$，$m=2$ は解の一つだから，

$$3\cdot3-4\cdot2=1$$

よって，辺々を引いて

$$3(n-3)-4(m-2)=0$$
$$3(n-3)=4(m-2)$$

3 と 4 は互いに素なので，k を整数として，

$$n-3=4k,\quad m-2=3k$$
$$(m,\ n)=(3k+2,\ 4k+3)$$

m，n を 1 以上 10 以下の整数だから，$k=0$，1

$$\therefore\ (m,\ n)=(2,\ 3),\ (5,\ 7)$$

(ii) $3n-4m=-1$ のとき
$n=m=1$ は解の一つだから，

$$3\cdot1-4\cdot1=-1$$

よって，辺々を引いて

$$3(n-1)-4(m-1)=0$$
$$3(n-1)=4(m-1)$$

3 と 4 は互いに素なので，l を整数として，

$$n-1=4l,\quad m-1=3l$$
$$\therefore\ (m,\ n)=(3l+1,\ 4l+1)$$

m，n を 1 以上 10 以下の整数だから，$l=0$，1，2

$$\therefore\ (m,\ n)=(1,\ 1),\ (4,\ 5),\ (7,\ 9)$$

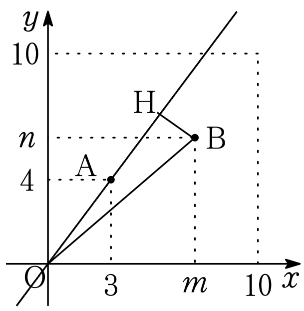
(i)(ii) より，求める B(m，n) は

$$(m,\ n)=(2,\ 3),\ (5,\ 7),\ (1,\ 1),\ (4,\ 5),\ (7,\ 9)$$

(2) B から直線 OA に下ろした垂線の長さ d は

$$d=\frac{|3n-4m|}{5}$$

である．



(i) (1) で求めた B のとき
$d=\dfrac{1}{5}$ で一定なので，

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{d}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5\mathrm{OB}}$$

$\sin\theta$ ($0<\theta<90^\circ$) のとき，$\sin\theta$ は増加関数なので，∠AOB を最小になるのは，OB の長さが最も長い時である．
(1) で求めた 5 点の場合の原点からの長さを計算して最も長いものは，B(7，9) である．
このとき，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{5\sqrt{7^2+9^2}}=\dfrac{1}{5\sqrt{130}}$

(ii) (1) で求めた B 以外のとき
このとき，$d=\dfrac{|3n-4m|}{5} \geqq \dfrac{2}{5}$ なので

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{d}{\mathrm{OB}} \geqq \frac{2}{5\mathrm{OB}}$$

OB の長さが一番長くなるのは B(10,　10) のときで，このとき，$\mathrm{OB}=10\sqrt{2}$. したがって，

$$\sin\angle\mathrm{AOB} \geqq \frac{2}{50\sqrt{2}}=\frac{1}{25\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{25\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{50}}>\frac{1}{5\sqrt{130}}$$

なので，(i) で求めた B(7,　9) の場合の方が，$\sin\angle\mathrm{AOB}$ の最小値が小さい.

　つまり，B(7,　9) のときに，$\angle\mathrm{AOB}$ が最小となる.

■